Programme de colle de la semaine 13

du Lundi 15 Décembre au Vendredi 19 Décembre.

Questions de cours.

On a fini le semestre avec de l'arithmétique et je ne sait pas trop quoi mettre

Donc voici les 2 exo d'arithmétique de la banque CCP plus un exo de révision (quasi indispensable)

Il y a les corrections officielles de la banques (que l'ai remis en forme et parfois complétée (en bleu))

Questions de cours et autour du cours.

$>$ Question 1. **Exercice 1.** [Correction] *Exercice n° 86 de la banque CCP*

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{N}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.

   Rappel/complément : $p \wedge a$ désigne $pgcd(p, a)$
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$.
   Indication : procéder par récurrence.

$>$ Question 2. **Exercice 2.** [Correction] Exercice n° 94 de la banque CCP.

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$.

   Démontrer que : $(a \text{ divise } c \text{ et } b \text{ divise } c) \iff (ab) \text{ divise } c$.
3. On considère le système (S) : $\left\{ \begin{array}{lll} x & \equiv & 6 \quad [17] \\ x & \equiv & 4 \quad [15] \end{array} \right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

$>$ Question 3.Je le fais lundi *Degré et coef des polynômes.*

Calculer le degré et le coef dominant de $\left[\left(X^2-1\right)^n\right]^{(n)}$

Soit le polynôme $P_n = (X+1)^{2n} = (X+1)^n (X+1)^n$

Calculer le coefficient X^n dans $P_n = (X+1)^{2n}$.

Calculer le coefficient X^n dans $P_n = (X+1)^n (X+1)^n$.

En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

$>$ Question 4.Je le fais lundi *Leibniz* L'exercice n°3 de la banque CCP

1. Énoncer la formule de Leibniz.
2. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
3. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.

   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

$>$ Question 5.Je le fais lundi *Leibniz*

On considère la polynôme $P_n = \dfrac{1}{n!}\left[(X+1)^n (X-1)^n\right]^{(n)}$.

Calculer $\left[(X+1)^n\right]^{(k)}$ et $\left[(X-1)^n\right]^{(n-k)}$,

Énoncer la formule de Leibniz puis en déduire que : $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \left(X+1\right)^{n-k} \left(X-1\right)^k$

Exercices.

Des exercices sur les polynômes mais sans les racines. Par exemple des équations d'inconnue des polynômes

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) *Correction officielle de la banque CCP.*

1. On suppose $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$.

   D'après le théorème de Bézout,
   $\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_1 p + v_1 a = 1$. (1)
   $\exists (u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_2 p + v_2 b = 1$. (2)
   En multipliant les équations (1) et (2), on obtient :

$$\underbrace{(u_1 u_2 p + u_1 v_2 b + u_2 v_1 a)}_{\in \mathbb{Z}} p + \underbrace{(v_1 v_2)}_{\in \mathbb{Z}} (ab) = 1$$

   Donc le seul diviseur commun de p et ab c'est 1.
   Conclusion : $p \wedge (ab) = 1$.

2. Soit p un nombre premier.

   (a) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$.

   Donc $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} k! = p(p-1)...(p-k+1)$. donc p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} k!$. (3)

   Or, $p \wedge k = 1$ (car p est premier et $k < p$) donc, d'après 1., $p \wedge k! = 1$. C'est correction officielle ; le "donc" est plutôt rapide. À méditer ou pas

   Donc, d'après le lemme de Gauss, (3) $\Longrightarrow$ p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.

   (b) Procédons par récurrence sur n.

   $>$ Pour $n = 0$ et pour $n = 1$, la propriété est vérifiée.

   $>$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété (P_n) : $n^p \equiv n \mod p$ soit vérifiée.

   Alors, d'après la formule du binôme de Newton, $(n+1)^p = n^p + \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} n^k + 1$. (4)

   Or $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ donc p divise $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} n^k$.

   Donc d'après (4) et (P_n), $(n+1)^p \equiv n+1 \mod p$ et (P_{n+1}) est vraie.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Correction officielle de la banque CCP. (mise en forme)

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

   À noter. Je n'ai pas explicité ce théorème en classe.

   $>$ Le sens $\Longrightarrow$ est connue c'est l'existence des coef de bézout

   $>$ Le sens $\Longleftarrow$ est évident avec le théorème le plus important de l'arithmétique

   Théorème de Bézout :

   Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

   $a \wedge b = 1 \Longleftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ au + bv = 1$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $a \wedge b = 1$.

   Soit $c \in \mathbb{N}$.

   Prouvons que $ab|c \Longrightarrow a|c$ et $b|c$.

   Si $ab|c$ alors $\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ c = kab$.

   Alors, $c = (kb)a$ donc $a|c$ et $c = (ka)b$ donc $b|c$.

   Prouvons que $(a|c$ et $b|c) \Longrightarrow ab|c$.

   Démo de la correction officielle

   $a \wedge b = 1$ donc $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ au + bv = 1$. (1)

   De plus $a|c$ donc $\exists k_1 \in \mathbb{Z} \ / \ c = k_1 a$. (2)

   De même, $b|c$ donc $\exists k_2 \in \mathbb{Z} \ / \ c = k_2 b$. (3)

   On multiplie (1) par c et on obtient $cau + cbv = c$.

   Alors, d'après (2) et (3), $(k_2 b)au + (k_1 a)bv = c$, donc $(k_2 u + k_1 v)(ab) = c$ et donc $ab|c$.

   Démo perso que je trouve plus simple et plus claire

   Comme a divise c, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $c = ak$

   On a maintenant : b divise $c = ak$ et b est premier avec a

   b divise k, CàD il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k = bk'$

   Conclusion : $c = ak = a(bk') = ab.k'$, CàD ab divise c. Fini

   On a donc prouvé que $(a|c$ et $b|c) \iff ab|c$.

3. (a) **Première méthode** (méthode générale) :

   Soit $x \in \mathbb{Z}$.

   $$\text{On a} \quad x \text{ solution de}(S) \iff \exists (k,k') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = 6 + 17k \\ x = 4 + 15k' \end{cases}$$

   $$\iff \exists (k,k') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = 6 + 17k \\ 6 + 17k = 4 + 15k' \end{cases}$$

   Or $6 + 17k = 4 + 15k' \iff 15k' - 17k = 2$.

   Pour déterminer une solution particulière x_0 de (S), il suffit donc de trouver une solution particulière (k_0, k_0') de l'équation $15k' - 17k = 2$.

   $>$ Pour cela, cherchons d'abord, une solution de l'équation $15u + 17v = 1$.

   17 et 15 sont premiers entre eux.

   Déterminons alors un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tel que $15u_0 + 17v_0 = 1$.

   On a : $17 = 15 \times 1 + 2$ puis $15 = 7 \times 2 + 1$.

   Alors $1 = 15 - 7 \times 2 = 15 - 7 \times (17 - 15 \times 1) = 15 - 17 \times 7 + 15 \times 7 = 15 \times 8 - 17 \times 7$

   Donc $8 \times 15 + (-7) \times 17 = 1$

   $>$ Ainsi, $16 \times 15 + (-14) \times 17 = 2$.

   Conclusion : On peut prendre alors $k_0' = 16$ et $k_0 = 14$.

   Ainsi, $x_0 = 6 + 17 \times k_0 = 6 + 17 \times 14 = 244$ est une solution particulière de (S).

   Deuxième méthode :

   En observant le système (S), on peut remarquer que $x_0 = -11$ est une solution particulière.

   Cette méthode est évidemment plus rapide mais ne fonctionne pas toujours.

   (b) Comme x_0 solution particulière de (S) donc $\begin{cases} x_0 & = & 6 & [17] \\ x_0 & = & 4 & [15] \end{cases}$.

   On en déduit que x solution de (S) si et seulement si $\begin{cases} x - x_0 & = & 0 & [17] \\ x - x_0 & = & 0 & [15] \end{cases}$

   c'est-à-dire x solution de $(S) \iff (17|x - x_0$ et $15|x - x_0)$.

   Or $17 \wedge 15 = 1$ donc d'après 2., x solution de (S) $\iff (17 \times 15)|x - x_0$.

   Donc l'ensemble des solutions de (S) est $\{x_0 + 17 \times 15k, \ k \in \mathbb{Z}\} = \{244 + 255k, \ k \in \mathbb{Z}\}$.