Programme de colle de la semaine 14

du Lundi 12 Janvier au 16 Janvier.

Questions de cours et autour du cours.

> Énoncer et démontrer la formule de Leibniz.

> *Leibniz* On considère $P \overset{def}{=} X^{2n} = X^n.X^n$

Calculer la dérivée n-ième de $P^{(n)}$. En déduire que : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

> *Leibniz* On considère une fonction f solution de l'équation différentielle $y' + 2x\,y = 1$.

En utilisant la formule de Leibnitz, montrer que : $f^{(n+1)}(x) + 2x\ f^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x) = 0$

> *Polynôme Pair* Soit P un polynôme pair, CàD $P(-X) = -P(X)$

Montrer que le polynôme P est la somme de monôme pair

En déduire qu'il existe un polynôme Q tel que $P = Q(X^2)$

> *Dérivée n-ième.*

Factoriser (dans $\mathbb{C}$) le polynôme $1 + x^2$ puis faire une DES de $\dfrac{1}{1+x^2}$. En déduire $\left[\dfrac{1}{1+x^2}\right]^{(n)}$

> *Dérivée n-ième.* Bonus car c'est plus difficile.

Calculer et simplifier $\left[\sqrt{1+x}\right]^{(n)}$

> *Taylor.* Bonus car c'est plus difficile.

Énoncer et démontrer la formule de Taylor.

Application : Soit $a, b \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme $P(X) = \dfrac{X^n(a - b\,X)^n}{n!}$.

Calculer $P^{(k)}(0)$.

> *Stable par produit* Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a+2b & a & a \\ a & b & b \\ a & b & b \end{pmatrix}$ *avec a,b des paramètre qcq dans* $\mathbb{R}$.

Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est stable par produit.

> *Nilpotente et Binôme.* Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

Donner la définition et les propriétés du nombre complexe j.

Vérifier que la matrice N est nilpotente et calculer $(\lambda\, I + N)^p$.

> *Munoz au tableau.* Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 et A^3

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\lambda_n, \mu_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = \lambda_n\, A + \mu_n\, A^2$.

Et calculer λ_{n+1} et μ_{n+1} en fonction de λ_n et μ_n.

Exercices.

Des exercices sur les polynômes mais sans les racines

et/ou sur les matrices comme en math expert, CàD sans algèbre linéaire