Exercice 1. CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC MP-MPI 2025 - Mathématiques 1 - 4h, calculatrices autorisées

Notations

— Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

— Si p est un nombre premier et si $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $v_p(n)$ la valuation p-adique de n, c'est-à-dire le plus grand entier naturel k tel que p^k divise n.

— Si x est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. En d'autres termes,

$$\pi(x) = \mathrm{card}(\{p \text{ premier},\ p \leqslant x\}) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} 1$$

où $\mathrm{card}(A)$ désigne le cardinal de l'ensemble fini A.

— En rouge, les indication que j'ai ajoutées

Le but de cette partie est d'établir l'encadrement suivant de la fonction π :

$$\forall x \in [3, +\infty[\quad \frac{\ln(2)}{6} \frac{x}{\ln(x)} \leqslant \pi(x) \leqslant 4 \frac{x}{\ln(x)}.$$

I - Calculs préliminaires

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\prod_{\substack{n+2 \leqslant p \leqslant 2n+1 \\ p \text{ premier}}} p \leqslant \binom{2n+1}{n} \leqslant 4^n$.

   Indication : Pour la minoration, on (re)-lira la démonstration de cours : Si/Lorsque p est premier alors pour tout $k \in \{1, .., (p-1)\}$, p divise $\binom{p}{k}$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p < 4^n.$$

   On pourra procéder par récurrence et effectuer l'hérédité en discutant suivant la parité de n.

3. En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$\prod_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} p < 4^x.$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} < 4^n.$$

5. Soit p un nombre premier. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

   C'est le théorème de Legendre, voir TD

6. En déduire que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et p nombre premier : si p^k divise $\binom{2n}{n}$, alors $p^k \leqslant 2n$.

II - Majoration de $\pi(x)$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que
$$\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p \geqslant \prod_{\substack{\sqrt{n} < p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p.$$

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$n^{(\pi(n)-\pi(\sqrt{n}))/2} < 4^n.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Justifier que
$$\pi(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n} < \frac{n}{\ln(n)},$$
puis en déduire que
$$\pi(n) \leqslant 4\frac{\ln(n)}{n}.$$
On pourra remarquer que $2 > \ln(4)$.

10. Soit $x \geqslant 3$. En utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ sur l'intervalle $[\mathrm{e}, +\infty[$, montrer que
$$\pi(x) \leqslant 4\frac{x}{\ln(x)}.$$

III - Minoration de $\pi(x)$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\pi(2n)}.$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que
$$\frac{2n\ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geqslant \frac{n\ln(2)}{\ln(2n)},$$
puis en déduire que
$$\pi(2n) \geqslant n\frac{\ln(2)}{\ln(2n)}.$$

13. Soit $x \geqslant 3$. Montrer que
$$\pi(x) \geqslant \frac{\ln(2)}{6}\frac{x}{\ln(x)}.$$
On pourra poser $n = \lfloor x/2 \rfloor$ *et utiliser 12.*

L'inégalité précédente a été asymptotiquement améliorée en 1896, ainsi on admettra dans la suite du problème le (difficile) résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers,
$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}.$$

Rapport du jury

Q1 La majoration a souvent été bien traitée.

Par contre, la minoration a posé des problèmes. Beaucoup de candidats ont tenté sans succès de la montrer par récurrence. Il faut utiliser le lemme de Gauss. À noter que les correcteurs ont vu plusieurs fois $(2n)! = 2^n n!$.

Q2 Cette question nécessite une récurrence forte que peu de candidats ont vue.

Attention au fait qu'un produit sans facteur vaut 1 et pas 0.

Q3 Une question facile qu'il convient de ne pas négliger : bien indiquer que p étant un entier, on a : $p \leqslant x \iff p \leqslant \lfloor x \rfloor$ et que la fonction $t \longmapsto 4^t$ est croissante.

Q4 Comme pour la question Q1, la majoration est souvent bien traitée au contraire de la minoration, qui résulte d'une simple récurrence.

Q5 Cette question, assez classique, a rarement été bien traitée.

Q6 Une question rarement faite.

C'est une conséquence directe de la question précédente en utilisant le fait que $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$

Q7 Une question facile souvent faite.

Il faut bien indiquer quand même qu'un nombre premier est supérieur à 1, sinon on ne peut conclure.

Q8 Une question très souvent correctement faite.

Q9 La preuve de la majoration a posé souvent des problèmes à cause de nombreuses erreurs de calcul. Il faut se ramener à l'étude de la fonction $e \longmapsto \sqrt{t} - \ln(t)$

Q10 Beaucoup de candidats oublient de mentionner que $x \geqslant 3$ implique que $x \geqslant \lfloor x \rfloor \geqslant e$ ce qui permet d'utiliser la croissance.

Q11 Question délicate qui demande d'utiliser la question Q6.

Q12 Comme pour la question Q9, beaucoup d'erreurs de calcul. Trop de candidats donnent directement $2n \leqslant 2^n$ sans justification.

Q13 Une question facile si on la traite avec soin. Beaucoup pensent que $2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$. Trop de candidats n'ont pas utilisé l'indication.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) **I - Calculs préliminaires**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\prod_{\substack{n+2 \leqslant p \leqslant 2n+1 \\ p \text{ premier}}} p \leqslant \binom{2n+1}{n} \leqslant 4^n$.

   Majoration ?

   On sait avec le binôme que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = (1+1)^{2n+1} = 2.4^n$

   De plus $\displaystyle\binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = (1+1)^{2n+1}$

   $$\text{De plus on a } \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n+1}{k} + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$$
   $$\geqslant \mathscr{O} + 2\binom{2n+1}{n} + \mathscr{O}$$

   Conclusion : $2\displaystyle\binom{2n+1}{n} \leqslant 2.4^n$ Yes ! ! !

   Minoration ?

   On note $A = \displaystyle\prod_{\substack{n+2 \leqslant p \leqslant 2n+1 \\ p \text{ premier}}} p$

   On sait que A divise $(2n+1)! = n!\,(n+1)!\displaystyle\binom{2n+1}{n}$

   car $(2n+1)! = \displaystyle\prod_{\text{tout les } p \text{ entre } 1 \text{ à } (2n+1)} p$

   De plus A est premier avec $n!$ et $(n+1)!$

   car les facteurs premiers de $n!$ et $(n+1)!$ sont $\leqslant n+1$ et ceux de A sont $\geqslant n+2$

   Conclusion : D'après Gauss A divise $\displaystyle\binom{2n+1}{n}$ ainsi comme tout est positif $A \leqslant \displaystyle\binom{2n+1}{n}$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p < 4^n$.

   On fait par récurrence *forte* : $H_{<n>}$: $\displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p < 4^n$

   Initialisation avec $n = 2$

   On a $\displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant 2 \\ p \text{ premier}}} p = 2 \leqslant 4^2 = 16$

   Donc $H_{<2>}$ est vrai

   Hérédité. On suppose $H_{<1>}, \ldots, H_{<n-1>}, H_{<n>}$

   $>$ Si $n+1$ est pair donc non-premier

   Alors $\displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n+1 \\ p \text{ premier}}} p = \prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p$

   On applique $H_{<n>}$

   $\leqslant 4^n \leqslant 4^{n+1}$

   $>$ Si $n+1 = 2\alpha+1$ est impair,

   alors on a $\displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n+1 \\ p \text{ premier}}} p = \left(\prod_{\substack{p \leqslant \alpha+1 \\ p \text{ premier}}} p\right)\left(\prod_{\substack{\alpha+2 \leqslant p \leqslant 2\alpha+1 \\ p \text{ premier}}} p\right)$

   On applique $H_{<\alpha>}$ *et la question Q1*

   $\leqslant 4^\alpha\, 4^\alpha$

   $\leqslant 4^{2\alpha} \leqslant 4^{2\alpha+1}$

   Dans toutes les situations on a conclut donc $H_{<n+1>}$ est vraie Fini

   Remarque : C'est une récurrence forte car dans la situation $n+1 = 2\alpha+1$ on a utilisé $H_{<\alpha>}$ et $\alpha < n$

3. En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $\displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} p < 4^x$.

On sait que $\forall\, x \geqslant 1$, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ et $x \longmapsto 4^x$ est croissante, ainsi

$$\prod_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} p = \prod_{\substack{p \leqslant \lfloor x \rfloor \\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^{\lfloor x \rfloor} \leqslant 4^x$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{4^n}{2n} \leqslant \dbinom{2n}{n} < 4^n$.

Majoration ?

C'est le même raisonnement que pour la question Q1

Minoration ?

On sait que le plus grand coef de la ligne $2n$ du triangle de Pascal, c'est $\dbinom{2n}{n}$

Ainsi on a $\underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}}_{=(1+1)^{2n}=4^n} \leqslant \underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{n}}_{=(2n+1)\binom{2n}{n}}$. OUPS. On a démontré $\dfrac{4^n}{2n+1} \leqslant \dbinom{2n}{n}$

Pour avoir la bonne majoration on va "ruser"

$$\begin{aligned}
4^n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} + 1 \\
&\leqslant 2 + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{n} \\
&\leqslant 2 + (2n-1)\binom{2n}{n} \\
&\textit{Or } 2 \leqslant \binom{2n}{n} \textit{ pour } n \geqslant 1 \\
&\leqslant \binom{2n}{n} + (2n-1)\binom{2n}{n} = (2n)\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

5. Soit p un nombre premier. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

$>$ Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Justifier que : Le nombre de multiple positif de a qui sont $\leqslant b$ est égale à $\lfloor b/a \rfloor$

Justifier que : Le nombre exact de multiple positif de a^k(CàD multiple de a^k et et pas de a^{k+1}) qui sont $\leqslant b$ est égale à $\lfloor b/a^k \rfloor - \lfloor b/a^{k+1} \rfloor$

$>$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier.

Justifier que : le nombre de fois qu'apparait le facteur p dans $n!$ est égale à

1 fois nombre exact de multiple positif de p

PLUS 2 fois nombre exact de multiple positif de p^2

PLUS 3 fois nombre exact de multiple positif de p^3 etc ...

$>$ En déduire que : le nombre de fois qu'apparait le facteur p dans $n!$ est égale à $\lfloor b/p \rfloor + \lfloor b/p^2 \rfloor + \lfloor b/p^3 \rfloor + \cdots$

6. En déduire que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et p nombre premier : si p^k divise $\dbinom{2n}{n}$, alors $p^k \leqslant 2n$.

On sait que : si p^k divise $\dbinom{2n}{n}$ alors $k \leqslant v_p\left(\dbinom{2n}{n}\right)$ et $p^k \leqslant p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)}$

On va majorer que : $v_p\left(\dbinom{2n}{n}\right)$

On a $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = v_p\left(\frac{(2n)!}{n!\,n!}\right) = v_p\left((2n)!\right) - 2\,v_p\left((n)!\right)$

$$= \sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^\ell}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^\ell}\right\rfloor\right)$$

De plus on sait $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$ donc $2\lfloor x\rfloor \leqslant 2x < 2\lfloor x\rfloor + 2$

Donc $\lfloor 2x\rfloor = 2\lfloor x\rfloor$ ou $\lfloor 2x\rfloor = 2\lfloor x\rfloor + 1$

On a donc $0 \leqslant \lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor \leqslant 1$

Ainsi $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^\ell}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^\ell}\right\rfloor\right)$

La somme s'arrête quand $p^\ell > (2n) \iff \ell \leqslant \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)}\right\rfloor$

$$= \sum_{\ell=1}^{\left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)}\right\rfloor}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^\ell}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^\ell}\right\rfloor\right)$$

$$\leqslant \sum_{\ell=1}^{\left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)}\right\rfloor} 1 = \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)}\right\rfloor \leqslant \frac{\ln(2n)}{\ln(p)}$$

Conclusion : on a p^k divise $\binom{2n}{n} \iff p^k \leqslant p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)} \leqslant p^{\frac{\ln(2n)}{\ln(p)}} = \exp\left(\frac{\ln(2n)}{\ln(p)}.\ln(p)\right) = 2n$

II - Majoration de $\pi(x)$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p \geqslant \prod_{\substack{\sqrt{n}<p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p$.

   C'est "évident" car $\left\{\substack{\sqrt{n}<p\leqslant n\\ p \text{ premier}}\right\} \subset \left\{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}\right\}$, ainsi

$$\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p = \left(\prod_{\substack{1<p\leqslant\leqslant\sqrt{n}\\ p \text{ premier}}} p\right)\left(\prod_{\substack{\sqrt{n}<p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p\right) \geqslant 1\left(\prod_{\substack{\sqrt{n}<p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p\right)$$

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^{(\pi(n)-\pi(\sqrt{n}))/2} < 4^n$.

   On sait avec Q2 que

$$4^n \geqslant \prod_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p \geqslant \prod_{\substack{\sqrt{n}<p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p$$

$$\geqslant \prod_{\substack{\sqrt{n}<p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \sqrt{n}$$

$$\geqslant \left(\sqrt{n}\right)^{\pi(n)-\pi(\sqrt{n})} = (n)^{\frac{\pi(n)-\pi(\sqrt{n})}{2}}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Justifier que $\pi(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n} < \frac{n}{\ln(n)}$,

   On a : $\pi(\sqrt{n}) = \mathrm{card}(\{p \text{ premier}, p \leqslant \sqrt{n}\}) = \sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{n}\\ p \text{ premier}}} 1$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant p\leqslant\sqrt{n}} 1 = \lfloor\sqrt{n}\rfloor \leqslant \sqrt{n}$$

   Pour la deuxième majoration,

   il faut voir que pour $n \geqslant 2$, tout est positif donc : $\sqrt{n} < \frac{n}{\ln(n)} \iff \sqrt{n} \geqslant \ln(n)$

   On conclut en étudiant la fonction $h : t \longmapsto \sqrt{t} - \ln(t)$

   puis en déduire que $\pi(n) \leqslant 4\frac{\ln(n)}{n}$.

On a avec Q8

$$\begin{aligned}
n^{(\pi(n)-\pi(\sqrt{n}))/2} &< 4^n \\
&\Longrightarrow \left(\frac{\pi(n)-\pi(\sqrt{n})}{2}\right)\ln(n) < n\ln(4) \\
&\Longrightarrow \pi(n) < \frac{n 2\ln(4)}{\ln(n)} + \pi(\sqrt{n}) \leqslant \frac{n}{\ln(n)} 2\ln(4) + \frac{n}{\ln(n)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\pi(n) < \dfrac{n}{\ln(n)}\left[2\ln(4)+1\right] \leqslant 5\dfrac{n}{\ln(n)}$

10. Soit $x \geqslant 3$. En utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ sur l'intervalle $[\mathrm{e}, +\infty[$, montrer que $\pi(x) \leqslant 4\dfrac{x}{\ln(x)}$.

On a
$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \pi\left(\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor\right) \\
&\leqslant 4f\left(\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor\right) \qquad \text{avec } f : x \longmapsto \frac{x}{\ln(x)} \\
&\leqslant 4f(x) \text{ car } f \text{ est croissante sur } [\mathrm{e}, +\infty[\text{ et } e \leqslant 3 \leqslant \left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor \leqslant x
\end{aligned}$$

III - Minoration de $\pi(x)$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dbinom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\pi(2n)}$.

Comme $\dbinom{2n}{n}$ est un entier qui divise $(2n)!$ donc ces facteurs premiers sont $\leqslant (2n)$

on a donc $\dbinom{2n}{n} = \displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant 2n \\ p \text{ premier}}} p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)}$

De plus avec la question Q6, on sait que $p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)} \leqslant 2n$

Conclusion : on a $\dbinom{2n}{n} \leqslant \displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant 2n \\ p \text{ premier}}} (2n) = (2n)^{\pi(2n)}$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\dfrac{2n\ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geqslant \dfrac{n\ln(2)}{\ln(2n)}$

On a
$$\begin{aligned}
\frac{2n\ln(2)}{\ln(2n)} - \frac{n\ln(2)}{\ln(2n)} &= \frac{n\ln(2)}{\ln(2n)} \\
&= \frac{\ln(2^n)}{\ln(2n)}
\end{aligned}$$

On vérifie facilement par récurrence que $\forall n \geqslant 1,\ (2n) \leqslant 2^n$. De plus la fonction $\ln$ est croissante,

Conclusion : on a bien : $\forall \geqslant 1,\ \dfrac{\ln(2^n)}{\ln(2n)} \geqslant 1$

Puis en déduire que $\pi(2n) \geqslant n\dfrac{\ln(2)}{\ln(2n)}$.

On sait d'après Q4 et Q11, que : $\dfrac{4^n}{2n} \leqslant \dbinom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\pi(2n)}$

Ainsi $\pi(2n)\ln(2n) \geqslant \ln\left(\dfrac{4^n}{2n}\right)$.

On ré-organise et on utilise l'inégalité $\dfrac{2n\ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geqslant \dfrac{n\ln(2)}{\ln(2n)}$ et cela conclut.

13. Soit $x \geqslant 3$. Montrer que $\pi(x) \geqslant \dfrac{\ln(2)}{6}\dfrac{x}{\ln(x)}$. *On pourra poser $n = \lfloor x/2 \rfloor$ et utiliser 12.*

On note $n = \lfloor x/2 \rfloor$, ainsi $n \leqslant x/2$

$$\begin{aligned}
\pi(x) &\geqslant \pi(2n) \qquad \text{car la fonction } \pi \text{ est croissante} \\
&\geqslant n\frac{\ln(2)}{\ln(2n)} \qquad \text{D'après Q12} \\
&\geqslant \left(\frac{x}{2} - 1\right)\frac{\ln(2)}{\ln(x)} \qquad \text{car } n = \lfloor x/2 \rfloor \geqslant x/2 - 1
\end{aligned}$$

Enfin pour $x \geqslant 3$, $\left(\dfrac{x}{2} - 1\right) - \dfrac{x}{6} = \dfrac{x}{3} - 1 \geqslant 0$

Conclusion : Pour tout $x \geqslant 3$, on a $\pi(x) \geqslant \dfrac{\ln(2)}{6}\dfrac{x}{\ln(x)}$.