TD 11 Suite.

Mercredi 10 Décembre 2025.

Math-classique

Exercice 1. [Correction]

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. Exprimer $\binom{2n+1}{n+1}$ en fonction $\binom{2n}{n}$.
3. En déduire que ; $(n+1)$ divise $\binom{2n}{n}$.

Exercice 2. [Correction] Soit n un entier.

1. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
   Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} en fonction a_n et b_n.
2. Montrer que : $(a_n)^2 - 2(b_n)^2 = (-1)^n$
3. En déduire que a_n et b_n sont premier entre eux

Exercice 3. [Correction] Soit n un entier. On note F_n le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$

1. On suppose que $a \geqslant 1$ est un diviseur commun de F_n et F_{n+1}.
   $>$ Écrire son formulaire sur les puissances. Calculer $2^{2^{n+1}}$ en fonction de 2^{2^n}
   En déduire F_{n+1} en fonction de F_n.

   $>$ En déduire que : a divise 2 puis que $a = 1$. Conclusion : F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
2. **Bonus** Montrer, par récurrence, : $\forall\, n \;\; F_{n+1} = F_1 F_2 \cdots F_n - 2$.
   En déduire F_n et F_{n+k} sont premiers entre eux.

Un peu plus dur.

Exercice 4. Théorème de Legendre

1. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$.
   Justifier que : Le nombre de multiple positif de a qui sont $\leqslant b$ est égale à $\lfloor {}^{b}/_{a} \rfloor$
   Justifier que : Le nombre exact de multiple positif de a^k(CàD multiple de a^k et et pas de a^{k+1}) qui sont $\leqslant b$ est égale à $\lfloor {}^{b}/_{a^k} \rfloor - \lfloor {}^{b}/_{a^{k+1}} \rfloor$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier.
   Justifier que : le nombre de fois qu'apparait le facteur p dans $n!$ est égale à
   1 fois nombre exact de multiple positif de p
   PLUS 2 fois nombre exact de multiple positif de p^2
   PLUS 3 fois nombre exact de multiple positif de p^3 etc ...
3. En déduire que : le nombre de fois qu'apparait le facteur p dans $n!$ est égale à $\lfloor {}^{b}/_{p} \rfloor + \lfloor {}^{b}/_{p^2} \rfloor + \lfloor {}^{b}/_{p^3} \rfloor + \cdots$

Exercice 5. [Correction] On sait qu'il y a une infinité de nombre premier,
donc il y a une infinité de nombre premier impair, CàD dire de la forme $4k+1$ ou $4k+3$.

Relire la démonstration de "il existe une infinité de nombre premier".

En suivant la même démarche, monter qu'il existe une infinité de nombre premier de la forme $4k+3$.

Indication : On pourra considère le nombre $A = 4(p_1 \ldots p_N) + 3$

Exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \underbrace{11...1}_{n \text{ chiffres}}$

On va démontrer que : 23 divise au moins 1 des nombre u_n, CàD 23 divise un nombre $\underbrace{11...1}_{n \text{ chiffres}}$

1. Méthode 1.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note r_k le reste de la division euclidienne de u_k par 23.
   Justifier qu'il existe deux entiers distincts $k > k' \geqslant 1$ tel que $r_k = r_{k'}$
   (b) Écrire et calculer $u_k - u'_k$. En déduire que 23 divise $u_{k-k'}$
   Conclusion : On a trouver un nombre de la forme $11...1$ divisible par 23.
   (c) À méditer :
   $>$ Peut-on remplacer 23 par un autre entier ?
   $>$ Peut-on remplacer : $11...1$ par $123\,123\ldots123$?

2. Méthode 2.
   (a) Rappel : on sait que : $1492 = 2.10^0 + 9.10^1 + 4.10^2 + 1.10^3$.
   Calculer u_n. en déduire que : 23 divise u_n Ssi $10^n \equiv 1 \mod [23]$
   (b) Lire le "petit théorème de Fermat. En déduire qu'il existe n tel que 23 divise u_n.