Exercices classiques

Exercice 1. [Correction] On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = e^{x^2}$

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall_, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x).e^{x^2}$
   et $P_{n+1}(X)$ en fonction en de $P_n(X)$.
3. Déterminer le degré de $P_n = P_n(X)$
4. Parité.
   (a) Démontrer, par récurrence, que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P_n(-X) = (-1)^n\ P_n(X)$.
   (b) Autre démonstration.
   La fonction f est la fonction définie au début de l'exercice.
   $>$ Calculer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
   $>$ On dérive n fois cette égalité.
   $>$ Conclure.
5. Une relation de récurrence d'ordre 2.
   (a) Écrire une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par la fonction f éviter les fractions.
   (b) On dérive n fois cette égalité Calculer$[\ xf(x)\ ]^{(n)}$ avec Leibniz.
   (c) En déduire une relation entre P_{n+2}, P_{n+1} et P_n.

Exercice 2. [Correction] On veut résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation différentielle : $(x^2-1)\,y'' + 2x\,y' - 6y = 0$

On suppose que P est un polynôme $\neq \mathscr{O}$ et solution de l'équation différentielle

1. Justifier que : $\deg(P) = 2$
2. Déterminer les polynômes qui vérifient E.

L'exercice 1 peut être remplacer par celui-ci

Exercice 3. [Correction] Par abus de langage, dans tout le problème on confond polynôme et fonction polynôme.
On appelle f la fonction de $[0, +\infty\,[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \ \forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = e^{-1/x}$$

Quelques propriétés de la fonction f

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$$
   et montrer que : (1) : $P_{n+1}(X) = (1 - 2nX)P_n(X) + X^2 P_n'(X)$
2. Donner la valeur de $P_n(0)$ et déterminer le degré de P_n
3. Vérifier que f est solution, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, de l'équation différentielle : $x^2 y' - y = 0$
   Puis, en utilisant la formule de Leibniz, montrer que :
$$(2) : P_{n+1}(X) + (2nX - 1)P_n(X) + n(n-1)X^2 P_{n-1}(X) = 0$$
4. Déduire des relations (1) et (2) les relations :
   (3) : $P_n(x) = 1 - n(n-1)\displaystyle\int_0^x P_{n-1}(t)dt$
   (4) : $n(n-1)\mathrm{P}_n(x) - [(2n-2)x - 1]\mathrm{P}_n'(x) + x^2\mathrm{P}_n''(x) = 0$

Un problème plus difficile et plus originale

Exercice 4. [Correction] Les polynômes de Bernoulli

On considère la suite de polynôme définie par

$$B_0 = 1 \text{ et } \forall\, n \geqslant 1,\ B_n' = n\, B_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(t)\, dt = 0$$

Afin de mieux comprendre comment cette définition fonctionne, je calcule le polynôme B_1.

Tout d'abord,

on a $B_1'(X) = 1.B_0(X) = 1 \underset{\text{On primitive}}{\Longrightarrow} B_1(X) = X + k$ *où k est une constante à déterminer*

On a ensuite

$$\int_0^1 B_1(t)\ dt = \int_0^1 (t+k)\ dt = \left[\frac{t^2}{2} + kt\right]_0^1 = \frac{1}{2} + k \implies k = \frac{-1}{2}$$

Conclusion : $B_1(X) = X - \dfrac{1}{2}$.

1. Bien définie ?
   (a) Montrer que $B_2(X) = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$.
   (b) Justifier que : la démarche proposée définie de manière unique la suite de polynôme (B_n).

   Ainsi il existe une unique suite de polynôme vérifiant la récurrence et l'initialisation du début.
2. Déterminer le degré et coef dominant de $B_n(X)$.
3. Montrer que $\forall\, n \geqslant 2,\ B_n(0) = B_n(1)$.
4. On considère les polynômes $P_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

   Montrer que $P_n(X)$ et $B_n(X)$ vérifient la même initialisation et la même relation de récurrence.

   $$\text{CàD } P_0 = ...,\ P_n' = ... \text{ et } \int_0^1 P_n(t)\, dt = ...$$

   En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$.
5. Un jolie égalité.
   (a) Montrer, par récurrence, que : $\forall\, n \geqslant 1,\quad B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.
   (b) En déduire le calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.
6. On va montrer que : $\forall\, n \geqslant 1,\quad B_n(2X) = 2^{n-1}\left[B_n(X) + B_n\left(X + \dfrac{1}{2}\right)\right]$

   Dans ce but, on introduit le polynôme $Q_n(X) = B_n(2X) - 2^{n-1}\left[B_n(X) + B_n\left(X + \dfrac{1}{2}\right)\right]$.

   `En on admet qu'un polynôme périodique est forcément constant (on démontera ceci bientôt)`

   (a) Vérifier $Q_n\left(X + \dfrac{1}{2}\right) - Q_n(X) = 0$.

   Conclusion : le polynôme Q_n est ${}^1\!/_2$-périodique et donc constant
   CàD il existe une constante $k_n \in \mathbb{R}$ tel que $Q_n(X) = k_n$

   (b) En considérant Q_{n+1}', montrer que $Q_n = \mathcal{O}$.

Remarque : On peut démontrer en suivant la même méthode une égalité encore plus générale

$$\forall\, a \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad B_n(aX) = a^{n-1}\sum_{k=0}^{a-1} B_n\left(X + \frac{k}{a}\right)$$

Une précision culturelle.

Les polynômes de Bernoulli $B_n(X)$ et les nombres de Bernoulli $b_n = B_n(0)$, ont de très nombreuses propriétés.
L' une des plus remarquable est la formule due à Euler

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{2\,(2n)!} b_{2n}$$

$>$ Si $n = 1$ alors $B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6} \implies b_2 = B_2(0) = \frac{1}{6}$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... = +\frac{(2\pi)^2}{2\,(2)!} b_2 = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,644\,9$$

$>$ Si $n = 2$ alors $B_4(X) = X^4 - 2\,X^3 + X^2 - \frac{1}{30} \implies b_4 = B_4(0) = -\frac{1}{30}$,on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + ... = -\frac{(2\pi)^4}{2\,(4)!} b_4 = \frac{\pi^4}{90} \approx 1,082\,3$$

$>$ Les valeurs suivantes sont $b_6 = \frac{1}{42}, ..., b_{12} = \frac{-691}{2730} = Moche$!!!, ...

D'une façon générale, on sait calculer les nombres b_n par récurrence
mais Il n'y a pas d'expression simple et directe pour les nombres b_n

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

$$\text{On a : } f'(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x^2}\right] = 2x\, e^{x^2}$$

$$ET$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[2x\, e^{x^2}\right] = 2\left(1e^{x^2} + x\,(2x)\, e^{x^2}\right) = \left(4x^2+2\right)e^{x^2}$$

2. On va démontrer par récurrence

$$H\langle n\rangle : \left|\begin{array}{l}\text{il existe un polynôme } P_n \text{ tel que}\\ \quad \forall, x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x)\,.e^{x^2}\end{array}\right.$$

Initialisation avec $n=0$

Comme $\forall\, x,\ f^{(0)}(x) = f(x) = e^{x^2}$, $P_0 = 1$ convient.

Ainsi $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité On suppose $H\langle n\rangle$.

$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}}$

$$\text{On a } f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left[f^{(n)}(x)\right]'$$

$$\left[P_n(x)\,.e^{x^2}\right]'$$

$$= \left[P_n(x)\right]'.e^{x^2} + P_n(x)\,.\left[e^{x^2}\right]' = \ldots = \left[P_n'(x) + 2xP_n(x)\right].e^{x^2}.$$

On choisit $P_{n+1} = P_{n+1}(X) = P_n'(X) + 2XP_n(X)$.

Comme P_n est un polynôme, on a bien P_{n+1} est un polynôme et il convient

Conclusion : $H_{<n+1>}$ est vraie

3. Déterminer le degré de $P_n = P_n(X)$

A l'aide de la question $Q1$, on a $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$ et $P_2 = 4X^2+2$

On fait par récurrence

$$H\langle n\rangle : P_n(X) = 2^n X^n + \ldots..$$

Initialisation avec $n=0$

Comme $P_0 = 1$, ainsi $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité On suppose $H\langle n\rangle$.

$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}}$

$$\begin{aligned}\text{On a } P_{n+1}(X) &= P_n'(X) + 2XP_n(X)\\ &= \left[2^n n\, X^{n-1} + \ldots.\right] + 2X\left[2^n X^n + \ldots.\right]\\ &= 2^{n+1}\ X^{n+1} + \ldots..Fini\end{aligned}$$

Conclusion : $H_{<n+1>}$ est vraie

Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\deg(P_n) = n$ et son coefficient dominant est 2^n

4. Parité.

(a) Démontrer, par récurrence, que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ P_n(-X) = (-1)^n\ P_n(X)$.

On fait par récurrence

$$H\langle n\rangle : P_n(-X) = (-1)^n\ P_n(X)$$

Initialisation avec $n=0$

Comme $P_0 = 1$, on a $P_0(X) = 1$ et $P_0(-X) = 1$

ainsi $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité On suppose $H\langle n\rangle$.

$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}\text{, CàD } P_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1}\ P_{n+1}(X)}$

$$\text{On a } P_{n+1}(-X) = P_n'(-X) + 2(-X)\,P_n(-X)$$

$>$ $P_n(-X)$ se calcule avec $H_{<n>}$

$>$ Pour calculer $P_n'(-X)$, on dérive $P_n(-X) = (1)^n P_n(X)$

Ainsi $[P_n(-X)]' = [(1)^n P_n(X)]$
$$\Longrightarrow \ominus P_n'(-X) = (1)^n P_n'(X)$$
$$\Longrightarrow P_n'(-X) = -(1)^n P_n'(X)$$

On a donc $P_{n+1}(-X) = -(-1)^n P_n'(X) - 2X(-1)^n \ P_n(X)$
$$= (-1)^{n+1} P_n'(X) + 2X(-1)^{n+1} \ P_n(X)$$
$$= (-1)^{n+1} \ P_{n+1}(X)$$
Conclusion : $H_{<n+1>}$ est vraie

(b) Autre démonstration.

On a facilement : $\forall x, \ f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x)$

On dérive n fois cette égalité, ainsi $\Big[f(-x)\Big]^{(n)} = \Big[f(x)\Big]^{(n)}$

On a $>$ $[\ f(x)\ ]^{(n)} = f^{(n)}(x)$

$>$ $[\ f(-x)\ ]^{(n)}$ =composée= $(-1)^n f^{(n)}(-x)$

car $f(-x) \rightsquigarrow (-1) f'(-x) \rightsquigarrow (-1)(-1) f''(-x) \rightsquigarrow ... \rightsquigarrow (-1)^n f^{(n)}(-x)$

Conclusion : $(-1)^n f^{(n)}(-x) = f^{(n)}(x)$

Conclusion : $\forall x, \ f^{(n)}(-x) = (-1)^n f^{(n)}(x)$
$$\Longrightarrow P_n(-x)\, e^{x^2} = (-1)^n P_n(x)\, e^{x^2}$$
$$\Longrightarrow P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \qquad Yes$$

5. Une relation de récurrence d'ordre 2.

(a) On a facilement $f'(x) - 2xf'(x) = 0$

(b) On dérive n fois cette égalité, ainsi $\left[f'(x)\right]^{(n)} - 2\,[x\, f(x)]^{(n)} = 0$

$>$ On a $\left[f'(x)\right]^{(n)} = f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)\,.e^{x^2}$

$>$ $[\ xf(x)\ ]^{(n)}$ = ..avec Leibniz.. $= xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$

(c) On remplace $f^{(n)}(x)$ par $P_n(x)\,.e^{x^2}$ et on obtient

$$P_{n+1}(X) = XP_n(X) + nP_{n-1}(X)$$

Conclusion : $P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) + (n+1)\,P_n(X)$ Yes

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Justifier que : $\deg(P) = 2$

   Comme P est un polynôme $\neq \mathscr{O}$, on peut écrire $P = \underbrace{a}_{\neq 0} X^\alpha + \cdots$.

   De plus P est solution de l'équation différentielle, ainsi $(x^2-1)\,P'' + 2x\,P' - 6P = \mathscr{O}$

   Ainsi on a

$$
\begin{aligned}
&\left(X^2-1\right)P''(X) + 2XP'(X) - 6P(X) = \mathscr{O}\\
&\iff \left(X^2-1\right)\left[a\alpha(\alpha-1)X^{\alpha-2}\cdots\right] + 2X\left[a\alpha X^{\alpha-1}\cdots\right] - 6\left[aX^\alpha\cdots\right] = \mathscr{O}\\
&\iff X^\alpha\left[a\alpha(\alpha-1) + 2a\alpha - 6a\right] + \cdots = \mathscr{O}\\
&\iff X^\alpha a\left[\alpha^2 + \alpha - 6\right] + \cdots = \mathscr{O}
\end{aligned}
$$

   Donc $\underbrace{a}_{\neq 0}\left[\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 6\right] = 0$

   De plus avec le discriminant, on obtient que : $\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 6 = 0 \iff \alpha = 2$ ou $\alpha = -3$

   Or α est un degré donc $\alpha \in \mathbb{N}$

   Conclusion : $\deg(P) = 2$

2. Déterminer les polynômes qui vérifient E.

   On cherche les solution de la forme $P(X) = aX^2 + bX + c \in H$. On a

$$
\begin{aligned}
&\left(X^2-1\right)P''(X) + 2XP'(X) - 6P(X) = \mathscr{O}\\
&\iff \left(X^2-1\right)[2a] + 2X[2aX+b] - 6\left[aX^2+bX+c\right] = \mathscr{O}\\
&\iff X^2[2a+4a-6a] + X[2b-6b] + [-a-6c] = \mathscr{O}
\end{aligned}
$$

   Donc $b = 0$ et $a = -6c$.

   Conclusion : Les solutions P polynômiale de (E) sont $P = 6cX^2 - c = c\left(6X^2-1\right)$ avec $c \in \mathbb{R}$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Classique

   $>$ Sur $]0,+\infty[$, la fonction est définie avec des fonctions usuelles et les opérations classiques, ainsi f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$

   $>$ On démontrer par récurrence

$$H\langle n\rangle : \left| \begin{array}{c} \text{Il existe un polynôme } P_n \\ \text{tel que } \forall x>0,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \end{array}\right.$$

   A la fin de l'hérédité, on choisit $P_{n+1}(x)=(1-2nx)P_n(x)+x^2P'(x)$.
   Comme P_n est un polynôme, on a bien P_{n+1} est un polynôme.

2. Donner la valeur de $P_n(0)$

   On applique $P_{n+1}(X)=(1-2nX)P_n(X)+X^2P'(X)$ avec $X=0$,

$$\begin{aligned}\text{ainsi } P_n(0)&=(1-2(n-1)0)P_{n-1}(0)+0^2P'_{n-1}(0)\\ &=P_{n-1}(0)\end{aligned}$$

   Conclusion : $P_n(0)=P_{n-1}(0)=P_{n-2}(0)=...=P_0(0)=1$

   Déterminer le degré de P_n

   On fait par récurrence à partir de $n=1$

$$H_{<n>}\ :\ \deg(P_n)=n-1,\ C\text{à}D\ P_n=\underbrace{a}_{\neq 0}X^{n-1}+\cdots$$

3. Autour des P_n.
   (a) Facile.
   (b) On dérive n fois l'équation différentielle,... Fini.

4. On a

$$\left.\begin{array}{r} P_{n+1}(x)=(1-2nx)P_n(x)+x^2P'_n(x) \\ P_{n+1}(x)=(1-2nx)P_n(x)+n(n-1)x^2P_{n-1}(x)\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ x^2P'_n(x)=n(n-1)x^2P_{n-1}(x)$$

$$\text{Donc } P'_n(x)=n(n-1)P_{n-1}(X)$$

   On intègre cette égalité sur $[0,x]$ ainsi

$$\int_0^x P'_n(t)\ dt=n(n-1)\int_0^x P_{n-1}(t)\ dt$$

   Fini car $P_n(0)=1$

5. On a facilement $P_{n+1}(x)=(1-2nx)P_n(x)+x^2P'_n(x)$

$$\Longrightarrow\ P_{n+2}(x)=(1-2(n+1)x)P_{n+1}(x)+x^2P'_{n+1}(x)$$

   On remplace $P_{n+1}(x)$ par son expression en $P_n(x)$
   On remplace $P'_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$

   $=$ Expression en fonction $P_n(x), P'_n(x), P''_n(x)$

   On remplace maintenant $P_{n+2}(x)=(1-2(n+1)x)P_{n+1}(x)+(n+1)(n)x^2P_n(x)$ Fini OUf 1 ! ! !

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. En suivant la méthode, on a trouve facilement $B_2(X) = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$
2. Justifier que : la démarche proposée définie de manière unique la suite de polynôme (B_n).

   On va démontrer par récurrence

   $$H\langle n\rangle : |B_n \text{ est unique.}$$

   $>$ Initialisation n=0

   B_0 est donné par l'énoncé donc $H\langle 0\rangle$ est vraie.

   $>$ Hérédité On suppose que $H\langle n\rangle$ est vraie

   D'après $H_{<n>}$, on sait que B_n est unique,

   CàD les coef a_k tel que $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ sont unique.

   De plus $B'_{n+1} = nB_n$ donc en primitivant, on a $B_{n+1} = n\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{X^{k+1}}{k+1}\right) + k.$

   Reste à voir que la constante k est définie de façon unique.

   On sait que $0 = \displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t)\text{ dt} = \left[a_p \frac{X^{p+2}}{(p+1)(p+2)} + ... + a_0 \frac{X^2}{2} + kX\right]_0^1$

   Ainsi $k = -\left(a_p \dfrac{1}{(p+1)(p+2)} + ... + a_0 \dfrac{1}{2}\right)$est unique (à cause l'unicité des a_k).
3. Déterminer le degré et coef dominant de $B_n(X)$.

   On démontre par récurrence $H\langle n\rangle : |B_n = X^n + ...$
4. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ B_n(0) = B_n(1)$.

   Soit $n \geqslant 2$ fixé. on a $B_n(1) - B_n(0) = \displaystyle\int_0^1 B'_n(t)\text{ dt}$

   $$= n\int_0^1 B_{n-1}(t)\text{ dt} = 0 \quad \text{car } n-1 \geqslant 1$$
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$.

   On considère les polynômes $P_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

   On va montrer que $P_n(X)$ vérifie la même initialisation et la même relation de récurrence que B_n

   $>P_0 = (-1)^0 B_0(1-X) = 1 = B_0$

   $$\begin{aligned} >P'_n = [(-1)^n B_n(1-x)]' &= (-1)^n \ominus B'_n(1-x) \\ &= (-1)^{n+1} B'_n(\square) \qquad \text{avec } \square = 1-X \\ &= (-1)^{n+1} nB_{n-1}(\square) \\ &= n(-1)^{n+1} B_{n-1}(1-X) \\ &= n\,P_{n-1} \qquad \textit{car } (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

   $> \displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\,dt =$On fait le changement de variable $u = 1-t$

   Conclusion : même initialisation et même récurrence et unicité (voir Q2)

   donc $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$
6. Un jolie formule.

   (a) Montrer, par récurrence, que : $\forall n \geqslant 1, \quad B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.

   On démontre par récurrence $H\langle n\rangle : \left|B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}\right.$

   Initialisation n=1

   On a $B_1(X+1) - B_1(X) = \left(X + 1 - \dfrac{1}{2}\right) - \left(X - \dfrac{1}{2}\right) = 1 = 1.X^0$

   Donc $H\langle 1\rangle$ est vraie.

   Hérédité On suppose $H\langle n\rangle$

   On a $[B_n(X+1) - B_n(X)]' = nB_{n-1}(X+1) - nB_{n-1}(X)$

   On applique $H\langle n\rangle$

   $= n(n-1)X^{n-2}$

   On primitive ainsi $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1} + k$

   On évalue l'égalité en 0 ainsi $k = 0$ d'où le résultat.

(b) On vient de voir que $k^2 = \dfrac{B_3(k+1) - B_n(k)}{3}$ ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{B_3(k+1) - B_n(k)}{3} \right)$$

Télescopage

$$= \frac{1}{3} \left[B_3(n+1) - B_n(1) \right]$$

7. On va démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad B_n(2X) = 2^{n-1} \left[B_n(X) + B_n\left(X + \frac{1}{2}\right) \right]$$

Dans ce but, on introduit le polynôme $Q_n(X) = B_n(2X) - 2^{n-1} \left[B_n(X) + B_n\left(X + \frac{1}{2}\right) \right]$.

(a) On trouve $Q_n\left(X + \frac{1}{2}\right) - Q_n(X) = 0$

(b) Ainsi Q_n est périodique donc constant, i.e. $Q_n = \hat{k}_n$

— On a facilement $Q_n' = nQ_{n-1}$.

— On fait un R.A. Si $Q_n = \hat{k}_n \neq 0$. On a ainsi

$$Q_{n+1}' = (n+1)\, k_n \implies Q_{n+1} = (n+1)\, k_n\, X + \alpha$$

Donc Q_{n+1} n'est pas constant. Absurde.

(c) On procède exactement de même avec

$$Q_n(X) = B_n(mX) - m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(X + \frac{k}{m}\right)$$

et considérer $Q_n\left(X + \frac{1}{m}\right) - Q_n(X)$.