Les polynômes : Def et degré

1 Généralité(s)

1.1 C'est quoi un polynôme et c'est quoi X ?

Définition 1. Polynôme Vs Fonction polynômiale et X Vs x .

Polynôme algébrique. On dit que P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$

Ssi P est une liste d'éléments dans $\mathbb{K}$ *qui est nul à partir d'un certain rang.*

Par exemple : $P = (2,3,0,0,5,0,0,0,7,0,0,.....)$ la liste est nulle à partir du rang 9.

Le symbole X. Pour simplifier l'écriture de P, utilise le symbole X^k qui indique la position (à la façon du logiciel python) d'un élément dans la liste P. Ainsi on écrit

$$\begin{aligned} P &= (2,3,0,0,5,0,0,0,7,0,0,...) \\ &= 2X^0 + 3X^1 + 0X^2 + 0X^3 + 5X^4 + \cdots + 7X^8 \\ &= 2 + 3X + 5X^4 + 7X^8 \end{aligned}$$

Conclusion : Le symbole X n'est pas une variable , c'est un "indicateur de position".

On va admettre que le symbole X se manipule comme la variable x.

Fonction polynomiale.

Soit Le polynôme $P = 2+3X+5X^4+7X^8$ algébrique CàD la liste de ses coefficients, CàD $(2,3,0,0,5,0,0,0,7,0,0,.....)$.
La fonction polynomiale associée , c'est la fonction $P : x \longmapsto P(x) = 2+3x+5x^4+7x^8$

À méditer.

> Soit une fonction polynômiale sur $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$, CàD une fonction de $\mathscr{D}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
Par exemple : $\forall\, x \in \mathscr{D},\ P(x) = 2+3x+5x^4+7x^8$

Alors on peut appliquer/évaluer la fonction P avec $\square \in \mathscr{D},\ P(\square) = 2+3\square+5\square^4+7\square^8$

> Soit un polynôme algébrique, par exemple $P(X) = 2+3\,X+5\,X^4+7\,X^8$,

Alors on peut appliquer le polynôme P
> avec $x \in \mathbb{C}$ ou $\square \in \mathbb{C}$ on obtient $P(x)$ ou $P(\square)$
> et aussi avec la matrice carrée A on obtient $P(A)$
> Et même avec une fonction f on obtient $P(f)$

Remarque : le fonction $P(f)$, c'est $P(f) = 2\,id + 3\,f + 5\,f^4 + 7\,f^8$
et on a : $P(f) : x \longmapsto P(f)(x) = \left[2id + 3\,f + 5\,f^4 + 7\,f^8\right](x) = 2x + 3f(x) + 5f^5(x) + 7f^8(x)$

1.2 Opérations : CL, Produit, Composée, Dérivée.

Définition 2. Opérations classiques

On considère P et Q deux polynômes.

Alors on peut facilement calculer

> **Addition, Combinaison Linéaire, Produit.**

> **Composée.** Soit $P = P(X) = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k X^k$ et Q un polynôme

$$P \circ Q = P(Q) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{\alpha} a_k Q^k = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k \square^k \text{ avec } \square = Q = Q(X)$$

Application : Grâce à la composition des polynômes, on a $P(X) = P \circ X \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{\alpha} a_k X^k = P$

> **Polynôme Dérivé.** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul.

> Le polynôme dérivé de P, noté P', c'est :

$$P' = \left[\sum_{k=0}^{\alpha} a_k X^k\right]' \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{\alpha} a_k.(kX^{k-1}) = \sum_{p=0}^{n-1} a_{p+1}.(p+1)X^p$$

> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le n-ième polynôme dérivé de P, que l'on note $P^{(n)}$

On commence par $P^{(0)} = P$ et $P^{(1)} = P'$ Puis par récurrence, $P^{(n+1)} = [P^{(n)}]'$

Théorème 3. Formulaire sur la dérivation.

Soit $P, Q, R, \ldots$ des polynômes, on a

> Constante : Si $P = \lambda$ alors $P' = [\lambda]' = 0$

> Combinaison linéaire : $[\lambda P + \mu Q]' = \lambda P' + \mu Q'$.

> Produit : $[P.Q]' = P'.Q + P.Q'$.

Généralisation : $(P.Q.R)' = P'QR + PQ'R + PQR'$
$(P.Q.R.S)' =$

> Composée : $[P \circ Q]' = Q'.[P' \circ Q]$

> **Formule de Leibnitz.** $[P.Q]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [P]^{(k)}.[Q]^{(n-k)}$

> $\deg(P') = \deg(P) - 1 \quad et \quad \deg(P^{(n)}) = \deg(P) - n$

Ces formules sont valides sous réserve que deg soit $\geqslant 0$.

Démonstration : La démonstration de Leibniz se fait par récurrence suivant la même démarche que la démonstration de la formule du binôme.

Démonstration : Soit P un polynôme non nul, on peut écrire $P = \underbrace{a_\alpha}_{\neq 0} X^\alpha + \cdots$

On a $P' = [a_\alpha X^\alpha + \ldots]' = \alpha\, a_\alpha X^{\alpha-1} + \ldots$.

Attention, ce n'est pas fini : Il faut justifier que $coef(X^{\alpha-1})$ n'est pas égale à 0.

Lorsque $\alpha \geqslant 1$, C'est bon

2 Degré.

Définition 4. Degré, Unitaire,....

Degré.

Lorsque P est un polynôme $\neq 0$, le plus grand indice n tel que $a_n \neq 0$ est appelé degré de P et on le note $\deg(P)$

Conclusion : Lorsque P est un polynôme non nul

Alors P a un degré et je note $\alpha = \deg(P)$

$$\text{et on peut écrire } P = \underbrace{a_\alpha}_{\neq 0} X^\alpha + \cdots \text{ et/ou } P = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k X^k \text{ avec } a_\alpha \neq 0$$

Par convention : $\deg(0) = -\infty$.

Coef dominant, Unitaire. Lorsque $\deg(P) = n$, alors

$coef(X^n)$, c'est le coefficient dominant du polynôme P

et il est unitaire si $coef(X^n) = 1$

Conclusion : Si P est un polynôme unitaire de degré n,

on peut écrire $P = 1\,X^n + \cdots$

***Notation** :*

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}[X]$.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré $\leqslant n$ est noté $\mathbb{R}_n[X]$.

Théorème 5. Formulaire classique sur le degré.

Soit P, Q deux polynômes et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

> Quand $\lambda \neq 0$, on a $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.

> $\deg(P.Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

$$> \deg(\lambda P + \mu Q) = \begin{cases} = \max(\deg(P), \deg(Q)) & \text{Lorsque } \deg(P) \neq \deg(Q) \\ \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)) & \text{Lorsque } \deg(P) = \deg(Q) \end{cases}$$

> $\deg(P') = \deg(P) - 1 \quad et \quad \deg(P^{(n)}) = \deg(P) - n$

Ces formules sont valides sous réserve que deg soit $\geqslant 0$.

Démonstration : Soit P et Q deux polynômes non nuls. Je note $n = \deg(P)$ et $m = \deg(Q)$

On peut écrire $P = \underbrace{a_n}_{\neq 0} X^n + \cdots$ et $Q = \underbrace{b_m}_{\neq 0} X^m + \cdots$

On a maintenant

$$\lambda P = \lambda(a_n X^n + \cdots) = \lambda a_n X^n + \cdots$$
$$Comme\ \lambda a_n \neq 0,\ on\ a\ \deg(\lambda P) = n = \deg(P)$$

$$P.Q = (a_n X^n + \cdots).(b_p X^p + \cdots) = a_n.b_p X^{n+p} + \cdots$$
$$Comme\ a_n.b_p` \neq 0,\ on\ a\ \deg(PQ) = n + p = \deg(P) + \deg(Q)$$

Pour $(\lambda P + \mu Q)$, il y a une discussion selon que $n < p$, ou $n > p$ ou que $n = p$.

$$\lambda P + \mu Q = \lambda(a_n X^n + \cdots) + \mu(b_p X^p + \cdots) \begin{cases} Si\ n < p & = \mu b_p X^p + \cdots \\ & Comme\ \mu b_p \neq 0,\ on\ a\ \deg(\lambda P + \mu Q) = p \\ Si\ n = p & = (\lambda a_n + \mu b_n) X^n + \cdots \\ Si\ n > p & = \lambda a_n X^n + \cdots \\ & Comme\ \lambda a_n \neq 0,\ on\ a\ \deg(\lambda P + \mu Q) = n \end{cases}$$

Lorsque $p = n$, CàD $\deg(P) = \deg(Q)$, il est possible que le coefficient $(\lambda a_n + \mu b_n)$ de X^n soit nul,

on a alors une inégalité stricte, CàD $\deg(\lambda P + \mu Q) < \max(\deg(P), \deg(Q)) = n$

3 Égalité.

3.1 Équation polynômiale.

Théorème 6. Résoudre/Trouver

Pour résoudre/trouver une solution polynômiale, il faut **dans cet ordre**,

> Déterminer le degré de P

> puis les coefficients de P .

3.2 Égalité de deux polynômes.

Théorème 7. Égalité : degré et coefficients.

On considère $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ deux polynômes.

Deux polynômes sont égaux

Ssi ils ont les mêmes coefficients (et donc aussi le même degré.)

$$\text{CàD } P = Q \iff \begin{cases} \deg(P) = \deg(Q) \\ \forall\, k \in \{0, 1, \ldots, \deg\},\ a_k = b_k \end{cases}$$

Démonstration : La première propriété est une conséquence de la construction précise des polynômes, mais cette construction on ne l'a pas faite.

Théorème 8.

> **Les polynômes pairs et impair.**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme

On dit que le polynôme est pair Ssi $P(-X) = P(X)$

P est un polynôme pair $\iff$ Il n'y a que des monômes pairs

> **Lien Coefficient-Racines.**

Soit P un polynôme de degré n.

On peut écrire que $P = \underbrace{a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0}_{Forme\ développée} = \underbrace{a_n (X - r_1) \cdots (X - r_n)}_{Forme\ factorisée}$,

on a alors

$$coef\ de\ (X^n) = \underbrace{a_n}_{développé} = \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{factorisée}$$

$$coef\ de\ (X^{n-1}) = \underbrace{a_{n-1}}_{développé} = \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{factorisée}$$

$$coef\ de\ (X^0) = \underbrace{a_0}_{développé} = \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{factorisée}$$

Démonstration : On fait $\Longrightarrow$ et $\Longrightarrow$.

$\Longleftarrow$? On suppose que le polynôme P n'a que des monômes pairs

$$\boxed{\text{On va montrer que : } P(-X) = -P(X)}$$

Comme le polynôme P n'a que des monômes pairs, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} X^{2k}$, ainsi $P(-X) = \ldots$ à finir

$\Longrightarrow$? On suppose que $P(-X) = -P(X)$

Comme P est un polynôme, on peut écrire, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$$\boxed{\text{On va montrer que : Lorsque } k \text{ est impair alors } a_k = 0}$$

$$\begin{aligned} P(-X) = P(X) \quad &\iff \sum_{k=0}^{n} a_k(-X)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &\iff \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &\text{Ainsi on a } \forall\, k \in \mathbb{N},\ a_k(-1)^k = a_k \end{aligned}$$

Donc lorsque k est impair, on a $a_k = -a_k \implies a_k = 0$. Conclusion : Il n'y a que des monômes pairs. Fini.

4 Formule de Taylor.

Théorème 9. Formule de Taylor.

Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme de degré $\leqslant n$.

$$\text{Alors on a } \forall\, k \in \{0, 1, ..., n\},\ a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

Ainsi on peut écrire

$$P(X) = P(0) + P'(0)X + P''(0)\frac{X^2}{2!} + \cdots + P^{(k)}(0)\frac{X^k}{k!} + \cdots + P^{(n)}(0)\frac{X^n}{n!}$$

Généralisation : $P(a+h) = P(a) + P'(a)h + P''(a)\dfrac{h^2}{2!} + \cdots + P^{(k)}(a)\dfrac{h^k}{k!} + \cdots + P^{(n)}(a)\dfrac{h^n}{n!}$

Démonstration : On fera la démonstration en classe.

5 Exercices.

Opérations sur les polynômes

Exercice 1. [Correction] *Calculs simples.*

1. Développer $(X^2 - X - 1).(-2X^2 + X - 2)$ et $(1-X)^3 - (1+X)^3$
2. Soit $P = -X^2 + 2X + 1$. Calculer $P \circ P - P$ puis déterminer a, b tel que
$$[P \circ P] - P = \left(-X^2 + X + 1\right)\left(X^2 + aX + b\right)$$
3. Déterminer un polynôme P tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(2\theta) = P(\cos(\theta))$
Déterminer un polynôme P tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(3\theta) = P(\cos(\theta))$

Exercice 2. [Correction] *Calculs plus difficile.*

1. Déterminer $P = \mathrm{Re}\left[(X+i)^n\right]$ et $Q = \mathrm{Im}\left[(X+i)^n\right]$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un polynôme P tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = P(\cos(\theta))$

Exercice 3. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme $P = (X+1)^{2n} = (X+1)^n.(X+1)^n$.

1. Calculer le coefficient de X^n dans P : D'une part et d'autre part
2. En déduire que : $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Exercice 4. [Correction] On considère la fonction ϕ de $\mathbb{R}[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ définie par
$$\phi(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. Calculer : $\phi\left(\dfrac{X(X+1)(2X+1)}{6}\right)$ puis $[\phi \circ \phi]\left(\dfrac{X(X+1)(2X+1)}{6}\right)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les polynômes H_n dit de Hilbert le polynôme définis par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_n = \frac{(X-1)(X-2)\dots.(X-n)}{n!}$$
> Calculer $\phi(H_n)$. (on trouve un résultat de la forme λH_{n-1}).
> En déduire $[\phi \circ \phi](H_n)$ et même $[\phi \circ \phi \circ \phi](H_n)$

Exercice 5. [Correction]

1. Soit Le polynôme $P = X^2 + X - 1$.
Calculer $P(X).P(-X)$. Trouver un polynôme Q tel que $Q(X^2) = P(X).P(-X)$
2. Soit Le polynôme $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X+k)$.
Calculer $P(X).P(-X)$. Trouver un polynôme Q tel que $Q(X^2) = P(X).P(-X)$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les polynômes
$$P_n = X(X-n)^{n-1}$$

1. Calculer P'_n puis $P'_n(X+1) = P'_n \circ (X+1)$.
2. Calculer P_{n-1} et comparer avec $P'_n(X+1)$.

Degré

Exercice 7. [Correction] Déterminer le degré et le coef dominant de $P_3 = (1-X)^3 - (1+X)^3$, de $P_4 = (1-X)^4 - (1+X)^4$

Exercice 8. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme $P = (X^2-1)^n$
Calculer le degré et le coefficient dominant de $P^{(n)}$.

Exercice 9. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. on considère Q_n définie par

$$\forall n \in \mathbb{C},\ Q_n(z) = \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right]$$

Justifier que Q_n est un polynôme de degré $2n$, déterminer son coefficient dominant.
Calculer le coefficient de X^{2n-2}

Exercice 10. [Correction] On considère la suite de polynôme définie par

$$P_0 = 1,\ P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2}(X) = 2X P_{n+1}(X) - P_n(X)$$

Calculer P_2, P_3. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

Exercice 11. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit T un polynôme non nul vérifiant $(1-x^2)\,y'' - x\,y' + n^2\,y = 0$
Déterminer $\deg(T)$

Exercice 12. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme P_n le n-ième polynôme de Chebychev définie par

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{n-2k} (1-X^2)^k$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant du plateau n°k puis calculer le degré de P.
2. Calculer a_n, le coefficient dominant de P.

Résoudre-Trouver

Exercice 13. [Correction] `Une équation polynomiale simple.`
On va déterminer les polynômes non nul P vérifiant $(P')^2 = 4P$,
CàD on va résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $(P')^2 = 4P$.

Comme P est un polynôme non nul, P a un degré. je note $n = \deg(P)$.

1. Déterminer la valeur de n.
2. Déterminer P.

Exercice 14. [Correction] `Une équation polynomiale moins simple.`
On va déterminer les polynômes non nul P vérifiant $(X^2+1)P'' - 6P = 0$,
CàD on va résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $(X^2+1)P'' - 6P = 0$.

Comme P est un polynôme non nul, P a un degré. je note $\alpha = \deg(P)$.

1. Déterminer la valeur de α.
2. Déterminer P.

Exercice 15. [Correction] Résoudre les équations suivantes.

1. $Q^2 = X P^2$, ici les inconnues sont $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.
2. $P(X^2) = (X^2+1)\,P$, ici l'inconnue est $P \in \mathbb{R}[X]$.
3. $P \circ P = P$, ici l'inconnue est $P \in \mathbb{R}[X]$.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Facile
2. On a $$\begin{aligned} P\circ P &= -\left[-X^2+2X+1\right]^2+2\left[-X^2+2X+1\right]+1\\ &= -\left[X^4-4X^3+2X^2+4X+1\right]+\left[-2X^2+4X+2\right]+1\\ &= -X^4+4X^3-4X^2+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\circ P-P &= -X^4+4X^3-3X^2-2X+1\\ &= (-X^2+X+1)(X^2+aX+1)\\ &= (-X^2+X+1)(X^2-3X+1) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} Re\left[(X+i)^n\right] &= Re\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}\underbrace{i^k}_{Discution}\right]\\ &= \sum_{k=0\, et\, k\, pair}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}i^k\\ &= \sum_{p=0}^{n/2}\binom{n}{2p}X^{n-2p}i^{2p}\\ &= \sum_{p=0}^{n/2}\binom{n}{2p}(-1)^pX^{n-2p} \end{aligned}$$

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer un polynôme P tel que : $\forall\theta\in\mathbb{R},\ P(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On a $$\begin{aligned} Re\left[(X+i)^n\right] &= Re\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}\underbrace{i^k}_{Discution}\right]\\ &= \sum_{k=0\, et\, k\, pair}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}i^k\\ &= \sum_{p=0}^{n/2}\binom{n}{2p}X^{n-2p}i^{2p}\\ &= \sum_{p=0}^{n/2}\binom{n}{2p}(-1)^pX^{n-2p} \end{aligned}$$
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer un polynôme P tel que : $\forall\theta\in\mathbb{R},\ P(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Calcul du coefficient de X^n dans P :

   D'une part

   À l'aide du binôme, on a $(X+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}X^k$,

   Ainsi le coefficient de X^n dans P est égale à $\binom{2n}{n}$

   D'autre part

   On a $(X+1)^{2n}=(X+1)^n.(X+1)^n$

   $$\begin{aligned} \textit{Ainsi } (X+1)^{2n} &= (X+1)^n.(X+1)^n\\ &= \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right]\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right]\\ &= \left[\binom{n}{0}X^0+\binom{n}{1}X^1+\cdots+\binom{n}{n}X^n\right]\left[\binom{n}{0}X^0+\binom{n}{1}X^1\cdots+\binom{n}{n}X^n\right]\\ &= \cdots+X^{n+1}\left[\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots\right]+\cdots \end{aligned}$$

Ainsi le coefficient de X^n dans P est égale à
$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

2. On a donc

$$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

Or à cause de la symétrie, on a $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. On trouve $\phi\left(\frac{X(X+1)(2X+1)}{6}\right)=\ldots=(X+1)^2$.

   puis

$$\begin{aligned}[\phi\circ\phi]\left(\frac{X(X+1)(2X+1)}{6}\right)&=\phi\left(\phi\left(\frac{X(X+1)(2X+1)}{6}\right)\right)\\&=\phi\left((X+1)^2\right)\\&=(X+2)^2-(X+1)^2\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\phi(H_n)&=\frac{(X)(X-1)\ldots.(X+1-n)}{n!}-\frac{(X-1)(X-2)\ldots.(X-n)}{n!}\\&=\frac{(X)(X-1)\ldots.(X-(n-1))}{n!}-\frac{(X-1)(X-2)\ldots.(X-n)}{n!}\\&=\frac{(X-1)(X-2)\ldots.(X-(n-1))}{n!}[X-(X-n)]\\&=\frac{(X-1)(X-2)\ldots.(X-(n-1))}{(n-1)!}=H_{n-1}\end{aligned}$$

   On a maintenant

$$[\phi\circ\phi](H_n)=\phi\left(\phi(H_n)\right)=\phi\left(H_{n-1}\right)=H_{n-2}$$

$$[\phi\circ\phi\circ\phi](H_n)=\phi\left(\phi\left(\phi(H_n)\right)\right)=\phi\left(\phi(H_{n-1})\right)=\phi\left(H_{n-2}\right)=H_{n-3}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned} P(X).P(-X) &= (X^2+X-1)(\square^2+\square-1) \\ &= (X^2+X-1)(X^2-X-1) = X^4-3X^2+1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On veut trouver un polynôme } Q \text{ tel que : } P(X).P(-X) = Q(\square) \text{ avec } \square = X^2.}$$

Comme $P(X).P(-X) = X^4-3X^2+1 = \square^2-3\square+1$ avec $\square = X^2$
donc le polynôme $Q(X) = X^2-3X+1$ convient.

2.

$$\boxed{\text{On veut trouver un polynôme } Q \text{ tel que : } P(X).P(-X) = Q(\square) \text{ avec } \square = X^2.}$$

On a

$$\begin{aligned} P(X).P(-X) &= \prod_{k=1}^{n}(X+k)\prod_{k=1}^{n}(-X+k) \\ &= \prod_{k=1}^{n}(X+k)(-X+k) \\ &= \prod_{k=1}^{n}(-X^2+k^2) = \prod_{k=1}^{n}(-\square+k^2) \quad avec\ \square = X^2 \end{aligned}$$

donc le polynôme $Q(X) = \prod_{k=1}^{n}(-X+k^2) = \prod_{k=1}^{n}\underbrace{-(X-k^2)} = (-1)^n\prod_{k=1}^{n}(X-k^2)$ convient.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

<u>Déterminer le degré et le coef dominant de $P = (1-X)^3-(1+X)^3$</u>

Le polynôme P est de la forme $P = (1-X)^3-(1+X)^3 = [\deg = 3]-[\deg = 3]$
Donc le formulaire ne permet pas de calculer le degré d'un polynôme

$$\begin{aligned} P = (1-X)^3-(1+X)^3 &= [1-3X+3X^2-X^3]-[1+3X+3X^2+X^3] \\ &= -2X^3+\cdots \end{aligned}$$

Donc P est de degré 3.

<u>Déterminer le degré et le coef dominant de $Q = (1-X)^4-(1+X)^4$</u>

le formulaire ne permet pas de calculer le degré d'un polynôme

$$\begin{aligned} Q = (1-X)^4-(1+X)^4 &= [1-4X+6X^2-4X^3+X^4]-[1+4X+6X^2+4X^3+X^4] \\ &= 0X^4-8X^3+\cdots \end{aligned}$$

Donc Q est de degré 3.

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

> Avec le formulaire, on a $\deg(P) = 2n$ ainsi $\deg(P^{(n)}) = n$.
> Pour le coef dominant il faut normaliser

$$\begin{aligned} P = (X^2-1)^n = X^{2n}+\cdots &\rightsquigarrow P' = (2n)X^{2n-1}+\cdots \\ &\rightsquigarrow P'' = (2n)(2n-1)X^{2n-2}+\cdots \\ &\rightsquigarrow P''' = (2n)(2n-1)(2n-2)X^{2n-3}+\cdots \\ &\quad\vdots \\ &\rightsquigarrow P^{[n]} = (2n)(2n-1)\cdots(n+1)X^n+\cdots \end{aligned}$$

Le coef dominant de $P^{(n)}$ est $(2n)(2n-1)\cdots(n+1) = \dfrac{(2n)!}{n!}$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé) Avec le binôme on a

$$\begin{aligned}
Q_n(z) &= \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1}-(z-i)^{2n+1}\right]\\
&= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(i)^k(z)^{2n+1-k}-\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-i)^k(z)^{2n+1-k}\right]\\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k\quad\underbrace{\left[1-(-1)^k\right]}_{=\text{ à 0 ou 2 selon parités}}\\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0,\ k\,impair}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k 2\\
&\qquad \textit{On ré-indexe avec } k=2p+1.\ \textit{C'est possible car } k \textit{ est impair}\\
&= \frac{1}{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(z)^{2n+1-(2p+1)}\underbrace{(i)^{2p+1}}_{=i(-1)^p}\\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p z^{2n-2p}
\end{aligned}$$

Ainsi

> Sur le plateau $p=0$, on lit coefficient de z^{2n}, c'est $a_{2n}=\binom{2n+1}{1}=2n+1$

> Sur le plateau $p=1$, on lit coefficient de z^{2n-2}, c'est $a_{2n}=-\binom{2n+1}{3}=-\dfrac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé) On trouve : $P_2(X)=2X^2-1,\ P_3=4X^3+\cdots$ et même $P_4=8X^3+\cdots$

On va montrer par récurrence à 2 étages

$$H_{<n>}: \text{Le poly } P_n \text{ est de degré n et son coef dominant est } = \text{ à } 2^{n-1},\ \text{CàD } P_n=2^{n-1}X^n+\cdots$$

Initialisation. Pour n=1 et n=2 Évident

Hérédité. On suppose $H_{<n>}$ et $H_{<n+1>}$

$$\boxed{\text{On va montrer que : Le poly } P_{n+2} \text{ est de degré } n+2 \text{ et son coef dominant est } = \text{ à } 2^{n+1}}$$

On a

$$\left.\begin{array}{l} P_{n+2}(X)=\underbrace{2XP_{n+1}(X)}_{\deg=(n+2)}-\underbrace{P_n(X)}_{\deg=n}\\[2ex] n<(n+2)\end{array}\right\}\Longrightarrow P_{n+2} \text{ est de degré } n+2$$

De plus

$$\begin{aligned}
P_{n+2}(X) &= 2XP_{n+1}(X)-P_n(X)\\
&= 2X[2^nX^{n+1}+\cdots]-[2^{n-1}X^n]+\cdots]\\
&= 2^{n+1}X^{n+2}+\cdots
\end{aligned}$$

Donc le coef dominant de P_{n+2} est bien égale à 2^{n+1}.

Solution de l'exercice 11 (Énoncé) Comme T est un polynôme $\neq 0$,
on sait que $\deg(T)=\alpha\in\mathbb{N}$ et on peut écrire $T=\underbrace{a}_{\neq 0}X^\alpha+\cdots$

l'équation devient

$$\begin{aligned}
&(1-X^2)T''-XT'+n^2T=0\\
&\Longleftrightarrow (1-X^2)\left[a\alpha(\alpha-1)X^{\alpha-2}+\cdots\right]-X\left[a\alpha X^{\alpha-1}+\cdots\right]+n^2\left[aX^\alpha+\cdots\right]=0\\
&\Longleftrightarrow X^n\left[-a\alpha(\alpha-1)-a\alpha+n^2a\right]+\cdots=0\\
&\Longleftrightarrow X^n a(-\alpha^2+\alpha-\alpha+n^2)+\cdots=0\\
&\Longleftrightarrow X^n a(-\alpha^2+n^2)+\cdots=0\\
&\Longleftrightarrow X^n a(n-\alpha)(n+\alpha)+\cdots=0
\end{aligned}$$

Un polynôme est nul Ssi ses coef sont nul donc on doit avoir

$$a(n-\alpha)(n+\alpha)=0 \iff a=0 \ ou \ \alpha=n \ ou \ \alpha=-1$$

Or $a \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{N}$,

Conclusion : Si T est une solution polynômiale non nulle de l'équation différentielle $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ alors forcément $\deg(T)=n$

Complément culturel : Il existe une solution polynômiale non nulle de degré n, c'est T_n, le n-ième polynôme de Chebychev.

Solution de l'exercice 12 (Énoncé)

1. On a : plateau n°k $=\binom{n}{k}(-1)^k \underbrace{X^{n-2k}}_{\deg=n-2k}\underbrace{(1-X^2)^k}_{\deg=2k}$ est de degré n.

   De plus

$$\begin{aligned}\text{plateau n°k } &= \binom{n}{k}(-1)^k X^{n-2k}(1-X^2)^k\\ &= \binom{n}{k}(-1)^k X^{n-2k}\left[(-1)^k X^{2k}+\cdots\right]\\ &= \left[\binom{n}{k}(-1)^{2k}X^n+\cdots\right]\\ &= \binom{n}{k}X^n+\cdots\end{aligned}$$

   Conclusion : le coef dominant du plateau n°k est $\binom{n}{k}$.

2. On a

$$\begin{aligned}P_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k X^{n-2k}(1-X^2)^k &= \sum_{k=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}X^n+\cdots}_{\text{plateau n°k}}\\ &= X^n\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right]+\cdots\end{aligned}$$

   Conclusion : le polynôme P_n est de degré n et son coef dominant est $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\square^k=(1+\square)^n=2^n$.

Solution de l'exercice 13 (Énoncé)

1. On va faire 2 deux méthodes.
   Avec le formulaire.

   Comme $P\neq 0$, P a un degré que je note α.
   On a $(P')^2=4P$, ainsi

$$\begin{aligned}&\deg(Gauche)=\deg(Droite)\\ &\text{CàD } 2(\alpha-1)=\alpha \iff \alpha=2\end{aligned}$$

   Sans le formulaire.

   Comme $P\neq 0$, P a un degré que je note α et on a $P=\underbrace{a}_{\neq 0}X^\alpha+\cdots$

   On a $(P')^2=4P$, ainsi

$$\begin{aligned}&(a\alpha\ X^{\alpha-1}+\cdots)^2=aX^\alpha+\cdots\\ \iff& \underbrace{a^2\alpha^2}_{\neq 0}X^{2\alpha-2}+\cdots=\underbrace{a}_{\neq 0}X^\alpha+\cdots\\ \implies& 2\alpha-2=\alpha\\ & \textit{Donc } \alpha=2\end{aligned}$$

2. Si il y a des solutions polynômiales P alors elles sont de degré 2.
   On cherche les solutions P de la forme $P=aX^2+bX+c$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

1. On a $\underbrace{(X^2+1)P''}_{deg=\alpha} - \underbrace{6P}_{deg=\alpha} = 0$ donc le formulaire ne conclut pas.

   On doit faire sans le formulaire.

   Comme $P \neq 0$, P a un degré que je note α et on a $P = \underbrace{a}_{\neq 0} X^\alpha + \cdots$

   On a $(X^2+1)P'' - 6P = 0$, ainsi

$$\begin{aligned}
&(X^2+1)\left(a\alpha(\alpha-1)X^{\alpha-2}+\cdots\right) - 6(aX^\alpha+\cdots\Big) = 0 \\
&\iff X^\alpha\,[a\alpha(\alpha-1)-6a] + \cdots = 0 \\
&\iff X^\alpha\,a(\alpha^2-\alpha-6) + \cdots = 0 \\
&\implies a(\alpha^2-\alpha-6) = 0
\end{aligned}$$

   Comme $a \neq 0$, on a donc forcément $\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$
   Avec le discriminant Δ, on trouve $\alpha = 3$ ou $\alpha = -2$
   Conclusion : Comme $\deg(P) = \alpha \in \mathbb{N}$, on a $\alpha = 3$ Yes ! ! !

2. Déterminer P.

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

1. Si P **et** Q sont des solutions non nul de $Q^2 = XP^2$, on a

   $\deg(Gauche)$ est pair et $\deg(Droite)$ est impair ! ! ! !
   OUPS donc il n'y a pas de solution avec P **et** Q non nul.

   Il y a deux situations particulières à examiner situation Lorsque $P = 0$ et situation Lorsque $Q = 0$.

2. Si P est une solutions non nul de l'équation $P(X^2) = (X^2+1)P$, on a

$$\deg(P(X^2)) = \deg((X^2+1)P) \iff 2\deg(P) = \deg(P)+2 \iff \deg(P) = 2$$

   Si l'équation admet des solutions $P \neq 0$, elles sont forcément de dégré 2.

   On cherche maintenant les solutions de degré 2, CàD de la forme $P = aX^2 + bX + c$.

   À faire.

3. Si P est une solutions non nul de l'équation $P \circ P = P$, on a

$$\deg(P \circ P) = \deg(P) \iff \deg(P)^2 = \deg(P) \iff \deg(P) = 0\, ou\, 1$$

   On cherche maintenant les solutions de degré $\leqslant 1$, CàD de la forme $P = aX + b$.

$$\begin{aligned}
P \circ P = P &\iff a\,[aX+b] + b = aX + b \\
&\iff a^2X + ab + b = aX + b \\
&\iff \begin{cases} a^2 = a \\ ab + b = b \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 - a = 0 \\ ab = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = 0 \;\; ou \;\; a = 1 \\ ab = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Situation $a = 1$
   On a alors forcément $b = 0$ Donc $P = 1X + 0 = X$ est une solution.

   Situation $a = 0$
   On a plus de condition sur b Donc $P = 0X + b = b$ est une solution.

   Conclusion : Les solutions de l'équation $P \circ P = P$ sont
   le polynôme X et les polynômes constants