Espace Vectoriel et ssev.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés les scalaires.

On les notera avec des lettres grecques : $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \ldots$.

1 $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.1 Un peu de théorie.

Définition 1. Produit par les scalaire, Addition

Soit E un ensemble.

> On dit que E est muni d'un "produit par les $\mathbb{R}$-scalaires "
Ssi il existe une fonction, notée $\odot$, de $\mathbb{K} \times E$ à valeurs dans E

CàD Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on peut calculer $\lambda.\overrightarrow{x}$ et $\lambda.\overrightarrow{x} \in E$.

> On dit que E est muni d'une addition
Ssi il existe une opération, notée $\oplus$, de $E \times E$ à valeurs dans E

CàD Pour tout $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x'} \in E$, on peut calculer $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x'}$ et $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x'} \in E$.

Exemples :

> Avec $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ les vecteurs du plan : on peut calculer $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

> Avec $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ les matrices 2×2 : on peut calculer $\lambda \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda \\ 2\lambda & 4\lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \cdots$

> Avec $P = P(X)$ les polynômes : on peut calculer $\lambda(2X^3 - X + 2) = 2\lambda X^3 - \lambda X + 2\lambda$ et $(2X^3 - X + 2) + (X^8 - 5X + 2) = \cdots$

> Avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonction : on peut calculer $\lambda \cdot f$ et $f + g$

Définition 2. Espace vectoriel.

Soit E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps.
On suppose que E est munit d'une addition, notée $+$, et d'un produit par les $\mathbb{K}$-scalaires, notée $\cdot$.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel Ssi

> $(E, +)$ est un groupe commutatif.
les éléments de E sont appelés les vecteurs et on les note parfois $\overrightarrow{u}$
Le neutre est noté 0_E ou $\overrightarrow{0_E}$, c'est le vecteur nul.
L'opposé de $\overrightarrow{u}$ est noté $-\overrightarrow{u}$.

> La loi $\cdot$, produit par les scalaires, doit vérifier : $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
- $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
- $\lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda + \mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{u}$
- $\lambda.(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda.\mu)\overrightarrow{u}$

Exemples :

> Le modèle : L'ensemble des vecteurs du plan est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
> L'ensemble des matrices carrée 2×2 à coefficient dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
> L'ensemble des polynômes à coefficient dans $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
> L'ensemble des fonctions de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
> L'ensemble des suites est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Théorème 3. Formulaire complémentaire.

Soit $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

> $\forall \lambda, \ \overrightarrow{u}$, on a $(-1)\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$ et $-(\lambda.\overrightarrow{u}) = \lambda.(-\overrightarrow{u}) = (-\lambda).\overrightarrow{u}$
> $\forall \overrightarrow{u}$, on a : $\quad \lambda.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \quad et \quad 0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Et aussi $\lambda.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \implies \lambda = 0 \ ou \ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

1.2 Combinaisons Linéaires.

Définition 4. CL ou Combinaison Linéaire

Soit $(E,+.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E et $\lambda, \mu, \lambda_1, ...$ des scalaires.

On appelle Combinaison Linéaire une somme **FINIE** de vecteur pondérée par des scalaires de $\mathbb{K}$.

par exemple

$$\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v} \quad ou \quad \alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}+\gamma\overrightarrow{w} \quad ou \quad \lambda_1\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\overrightarrow{u_2}+...+\lambda_n\overrightarrow{u_n}$$

Théorème 5. Manipulation des CL

Regrouper des vecteurs, CàD $\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}=\overrightarrow{Truc}$

Décomposer un vecteur, CàD $\overrightarrow{A}=...\overrightarrow{i}+...\overrightarrow{j}+...\overrightarrow{k}$.

Exemples de décomposition.

> On a : $z=a+ib=a.1+b.i$ et $a+b\sqrt{2}=a.1+b.\sqrt{2}$.

> On a : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3z \\ -1+z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

> On a : $\begin{pmatrix} a+2b & a & a \\ a & b & b \\ a & b & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

> On a : $2X^3+3X+1=2.X^3+3.X^1+1.X^0$

CàD un polynôme est une CL des monôme $X^0, X^1, .., X^{41}, ..., X^{1492}, ...$

> $\forall\ x,\ \cos(2x)\cos(3x)=\frac{1}{2}\cos(2x+3x)+\frac{1}{2}\cos(2x-3x)$

CàD la fonction $\cos(2x)\cos(3x)$ *est une CL sur des deux fonctions* $\cos(5x)$ *et* $\cos(x)$

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

alors (en général) il existe r, r', λ et μ tel que : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda r^n+\mu(r')^n$

CàD la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une CL des deux suites* $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $((r')^n)_{n\in\mathbb{N}}$

1.3 Listes espace vectoriel usuel

Dans un Esp Vect usuel, les vecteurs ont une notation usuelle et une forme usuelle

> Les espaces vectoriels de vecteur "colonne" $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$,...,$\mathbb{R}^n$.

On a : $\overrightarrow{U}\in\mathbb{R}^3$, on peut écrire $\overrightarrow{U}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

> Les espaces vectoriels de matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,...,$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On a : $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on peut écrire $M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

> Les espaces vectoriels de polynôme $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}_3[X]$,...,$\mathbb{R}_n[X]$ et aussi $\mathbb{R}[X]$

En classe.

> Les espaces vectoriels de fonction, noté $\mathscr{C}(\mathscr{D},\mathscr{A})$ ou $\mathscr{F}(\mathscr{D},\mathscr{A})$

On a : $f\in\mathscr{C}(\mathscr{D},\mathscr{A})$, alors $\left|\begin{array}{l} f \text{ est une fonction de } \mathscr{D} \text{ à valeurs dans } \mathbb{R} \\ \text{et } \forall\ x\in\mathscr{D}, \text{ le nombre } f(x) \text{ se calcule.} \end{array}\right.$

> Les espaces vectoriels des suites, noté $\mathbb{R}^\infty$

On a : $u\in\mathbb{R}^\infty$, on peut écrire $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(u_0,u_1,...,u_{41},...,u_{1492},...)$

1.4 Les sous espaces vectoriels.

Définition 6. Sous-espace vectoriel ou ssev

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $H \subset E$.

On dit que H est sous-espace vectoriel de E (ou ssev de E) Ssi

> $\overrightarrow{0} \in H$

> H est stable par Combinaison Linéaire

$$\text{CàD} \quad \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u} \in H \\ \\ \overrightarrow{v} \in H \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \in H$$

Exemple dans $\mathbb{R}^3$

Les droites **Vectorielles** sont des ssev Mais pas les droites quelconque
Les Plans **Vectoriel** sont des ssev Mais pas les plans quelconque

Théorème 7.

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit H un sous-espace vectoriel.

Alors $(H,+.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Ainsi un sous-espace vectoriel, c'est un espace vectoriel dans un espace vectoriel.

Vocabulaire :

Les ssev de dimension 1 sont appelés les droites vectorielles.
Les ssev de dimension 2 sont appelés les plans vectorielles.

2 $\mathbb{R}^2$ Vs $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

Définition 8.

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ se ressemblent

Description des vecteurs

> $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, c'est l'ensemble des listes (au sens informatique) de 2 réels.

$$\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2, \text{ ainsi on peut écrire } \overrightarrow{u} = (x, y).$$

> $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, c'est l'ensemble des matrices colonnes avec 2 coordonnées dans $\mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{U} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \text{ ainsi on peut écrire } \overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Manipulation des combinaisons linéaires, on a

> Dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \lambda(x, y) + \mu(x', y') = \textit{ on regroupe } = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$

> Dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\lambda\overrightarrow{U} + \mu\overrightarrow{V} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \textit{ On regroupe } = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \end{pmatrix}$$

Pour rendre les calculs plus lisibles, on écrira souvent $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à la place de (x, y), en effet

$$\begin{pmatrix} a+b \\ b-2a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Vs } (a+b, b-2a) = a(1,-2) + b(1,1)$$

Théorème 9. Les ssev de $\mathbb{R}^2$ - Notion de dimension

On sait intuitivement que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Alors les ssev de $\mathbb{R}^2$ *sont forcément de dimension 0,1 ou 2.*

Soit H un ssev de $\mathbb{R}^2$

> Si $\dim(H) = 0$, alors H est réduit au seul vecteur $\overrightarrow{0}$, CàD $H = \{\overrightarrow{0}\}$.
$H = \{\overrightarrow{0}\}$ est le seul ssev de dimension 0.

> Si $\dim(H) = 1$, alors H est une droite vectorielle.
Ainsi $\overrightarrow{0} = (0,0) \in H$ et H est dirigé par un vecteur directeur $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$,

$$\textit{CàD } \overrightarrow{u} \in H \iff \textit{ il existe } \lambda \in \mathbb{R}, \textit{ tel que } \overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{a}$$

> Si $\dim(H) = 2$, alors $H = \mathbb{R}^2$.
$H = \mathbb{R}^2$ le seul ssev de $\mathbb{R}^2$ de dimension $Top = 2$.<u>car c'est un ssev de $\mathbb{R}^2$.</u>

3 Intersection - Réunion.

Théorème 10. Intersection - Réunion.

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux ssev de E.

Intersection de 2 ssev.

$F \cap G$ est toujours un ssev de F et de G

Propriétés.

On a $\{\overrightarrow{0}\} \subset F \cap G \subset F, G \subset E$ et

$$0 \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant \begin{matrix} \dim(F) \\ \dim(G) \end{matrix} \leqslant \dim(E)$$

Généralisation : Une intersection quelconque de ssev est encore un ssev.

Réunion de 2 ssev.

$F \cup G$ n'est pas en général un ssev de E

Plus précisément

Si $F \not\subset G$ **et** $G \not\subset F$ alors $F \cup G$ n'est pas un ssev.

Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est un ssev.

Si $G \subset F$ alors $F \cup G = F$ est un ssev.

4 Sous-espace vectoriel engendré.

4.1 Définition et propriétés.

Définition 11. définition du Vect(...)

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

> Soit $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteur de E.

L'espace vectoriel engendré par la famille $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n})$

C'est l'ensemble de **<u>toutes les CL</u>** sur les vecteurs $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}$.

On le note $vect(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n})$

On a donc

$$\overrightarrow{u}\in vect(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}) \iff \left| \begin{array}{l} \textit{Il existe } (\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) \\ \\ tq\ \overrightarrow{u}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}+...+\lambda_n\overrightarrow{e_n} \end{array}\right.$$

> *La notion se généralise aux familles infinies*

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ une famille infinie de vecteur de E.

l'espace vectoriel engendré par la famille infinie $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$

C'est l'ensemble de **<u>toutes les CL</u>** sur les vecteurs $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$.

On le note $vect(\overrightarrow{e_i})_{i\in \mathbb{N}}$

Théorème 12. Propriétés.

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteur de E.
On a

> **Définition.** Lorsque $\overrightarrow{u}\in vect(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n})$,

on peut écrire $\overrightarrow{u}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}+...+\lambda_n\overrightarrow{e_n}$ avec $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\in\mathbb{K}$

> **Évident.** $vect(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n})$ est un ssev de E et

$$\forall\, k\in\{1,2,...,n\},\ \overrightarrow{e_k}\in vect(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}).$$

> **Optimalité.** $vect(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n})$ est le plus petit ssev (au sens de l'inclusion) contenant $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...$ et $\overrightarrow{e_n}$, CàD

$$\left.\begin{array}{r} H \textit{ est un ssev} \\ \\ \forall\, k\in\{1,2,...,n\},\ \overrightarrow{e_k}\in H \end{array}\right\} \Longrightarrow vect(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n})\subset H$$

4.2 Dirigé, engendré par.

Vocabulaire : Lorsque $H = vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$,

On dit que H est engendré, dirigé par $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

On dit que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est une famille génératrice de H.

Théorème 13. Comment trouver une famille génératrice.

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un ssev de E

On fait le calcul

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \in H &\iff \textit{On traduit } \overrightarrow{u} = ... \\ &\iff \textit{On poursuit les calculs} \\ &\iff \overrightarrow{u} = \underbrace{\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}}_{\textit{CL sur des vecteurs fixes.}} \end{aligned}$$

On constate que

> $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ sont des vecteurs fixes (CàD ne dépendent pas de $\overrightarrow{u}$).

> les α, β, γ sont des scalaires **quelconques** et **indépendants**,

Alors on peut conclure que : $H = vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$

Introduction à la dimension (Niveau 2).

> *Les droites vectorielles.*

Les droites vectorielles sont les ssev de dimension 1

donc les droites vectorielles sont dirigées par un vecteur $\neq \overrightarrow{O}$, CàD $D = vect\left(\overrightarrow{u}\right)$

Si/lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont // et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{O}$, on a $D = vect\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = vect\left(\overrightarrow{u}\right)$

Ainsi $1 = \dim(D) \leqslant cardinal\left(Famille\ Géné\right)$

et $1 = \dim(D) = cardinal\left(Famille\ Géné\ Optimal\right)$

Les Plans vectoriels.

Les plans vectoriels sont les ssev de dimension 2

donc les plans vectoriels sont dirigés par 2 vecteurs $\neq \overrightarrow{O}$ et non //.

Si/lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont non-optimal et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{O}$ et non//, on a $P = vect\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = vect\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$

Ainsi$2 = \dim(P) \leqslant cardinal\left(Famille\ Géné\right)$

et $2 = \dim(P) = cardinal\left(Famille\ Géné\ Optimal\right)$

Généralisation. On suppose que $H = vect\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_p}\right)$

> Alors $\dim(H) \leqslant cardinal\left(Famille\ Géné\right) = p$

> et $\dim(H) = p$ Ssi la famille génératrice $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_p}\right)$ est *"optimal"*

5 Exercices

Autour des CL.

Exercice 1. [Correction] Dans $\mathbb{R}^3$. On considère le vecteur $\overrightarrow{u}=(2,3,4)$

1. Est ce que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est une CL sur $(3,-7,0)$ et $(2,1,0)$?
2. Est ce que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est une CL sur $(1,2,-3)$ et $(-1,5,-4)$?

Exercice 2. [Correction] Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère le vecteur $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ A^n$ est une CL sur A et I_2.

Exercice 3. [Correction]

1. Exprimer la fonction $[\cos(3x)]$ comme une CL sur les fonctions $[\cos^3(x)],[\cos^2(x)],[\cos(x)],[1]$.
2. Exprimer la fonction $[\cos^2(x)]$ comme une CL sur les fonctions $[\cos(2x)],[1]$.
3. Exprimer la fonction $[\cos^3(x)]$ comme une CL sur les fonctions $[\cos(3x)],[\cos(2x)],[\cos(x)],[1]$.

Exercice 4. [Correction]

1. Montrer que : $[sin(2x)]$ n'est pas une CL sur $[\sin(x),\cos(x)]$.
2. Est ce que $[|t|]$ n'est pas une CL sur $[t],[t^2]$?

Exercice 5. [Correction] Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{X^2-5X+6}$ et interpréter le résultat en terme de CL.

Les ssev : niveau 0

Exercice 6. Vérifier que : H est un ssev.

$$H=\left\{\overrightarrow{U}=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \textit{avec}\ x+2y=0\right\}$$
$$H=\left\{\overrightarrow{U}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ \textit{avec}\ x+2y+3z=0\right\}$$
$$H=\left\{\overrightarrow{U}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ \textit{avec}\ x+2y=0\right\}$$

$$H=\left\{\overrightarrow{X}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \ \textit{avec}\ x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=0\right\}$$

Exercice 7. On considère H l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de la forme à $a(-2,3)+b(1,1)$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.

1. Vérifier que H est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que $H=\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Soit $\overrightarrow{a}=(-2,3,1)$. On considère l'ensemble.

$$H=\left\{\overrightarrow{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \ \textit{tq}\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{a}=0\ \right\}$$
$$H'=\left\{\overrightarrow{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \ \textit{tq}\ \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{a}=0\right\}$$

Vérifier que H et H' sont deux sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9. Soit $m\in\mathbb{R}$. On considère

$$H_m=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ \textit{tel que}\ tr(A)=m\right\}$$

.

Est ce que H_m est un ssev ? (On discutera en fonction de m).

Exercice 10. [Correction] Soit H l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 2a+b & b \\ b & a \end{pmatrix}$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$

Vérifier que H est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11. On considère l'ensemble

$$H = \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \textit{avec}\ f(0) = f'(0) = 0\right\}$$

Vérifier que H est sous-espace vectoriel.

Exercice 12. [Correction] On considère l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + xy = 0$
Vérifier que H est sous-espace vectoriel.

Exercice 13. On considère H l'ensemble des fonctions de la forme $ae^{i2t} + be^{-i2t}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$
Vérifier que H est sous-espace vectoriel.

Exercice 14. On se place dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions
Montrer que l'ensemble des fonctions π-périodique est un ssev.

Exercice 15. Soit la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \quad (R)$.
On considère l'ensemble

$$H = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ \textit{et la suite } u \textit{ vériragain la récurrence } (R)\right\}$$

Vérifier que H est sous-espace vectoriel.

Les ssev de $\mathbb{R}^n$: niveau 1

Exercice 16. Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

$$H = \left\{\overrightarrow{U} = (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \textit{avec}\ x + 2y = 0\right\}$$
$$H = \left\{\overrightarrow{U} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ \textit{avec}\ x + 2y + 3z = 0\right\}$$
$$H = \left\{\overrightarrow{U} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ \textit{avec}\ x + 2y = 0\right\}$$

$$H = \left\{\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ \textit{avec}\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 0\right\}$$

Exercice 17. On considère les ensembles

$$F = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et } G = vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Montrer que $F = G$.

Exercice 18.

1. Montrer que : $\mathbb{R}^2 = vect\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
2. Montrer que : $vect\left((1,2), (3,4)\right) = vect\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right) = \mathbb{R}^2$

Exercice 19.

1. On se place dans $\mathbb{R}^3$.
   On considère le plan P_1 d'équation $2x-y+3z=0$ et le plan P_2 dirigée par $(1,1,-2)$ et $(2,3,-2)$.
   Déterminer $P_1 \cap P_2$. (CàD équation, une famille qui dirige et dimension).
2. On se place dans $\mathbb{R}^4$.
   (a) On considère le ssev F d'équation $\left\{ \begin{array}{l} 2x-y+3z-2z=0 \\ -2x+y+z-z=0 \end{array} \right.$
   Déterminer une famille qui dirige F.
   (b) On considère le plan G dirigée par $(-1,1,1,-2)$ et $(-2,2,3,-2)$.
   Déterminer "une" équation G.
   (c) Déterminer $F \cap G$. (CàD équation, une famille qui dirige et dimension).

Les ssev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: niveau 1

Exercice 20. Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

$$H = \left\{ M = \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ \exists a,b,c \in \mathbb{R} \ tq \ M = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ b+c & a+b \end{pmatrix} \right\}$$

$$H = \left\{ M = \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ tr(AM) = 0 \right\} \qquad \textit{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 21. On se place dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère l'ensemble H des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ b+c & a+b \end{pmatrix}$

1. Montrer que H est un ssev et déterminer une famille génératrice de H.
2. Montrer que $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ engendre H
   En déduire la dimension de H.
3. Montrer que H est stable par produit.

Exercice 22. On considère l'ensemble H des matrices des matrices symétrique, CàD $H = \left\{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ tq \ M^T = M \right\}$
Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

Les ssev de $\mathbb{R}_n[X]$: niveau 1

Exercice 23. Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

$$H = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ tq \ P(1) = P'(2)\}$$
$$H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ tq \ P(1) = 0\}$$

Exercice 24. [Correction] On considère $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ tq \ P(1) = 0\}$

Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

Exercice 25. On considère $H = \left\{P \in \mathbb{R}_4[X] \ tq \ X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X)\right\}$

Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

Les ssev de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: niveau 1

Exercice 26. Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

$$H = \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \ / \ tq \ f' + xf = 0\right\}$$

Exercice 27. On se place dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions

On considère l'ensemble $H = vect\left([\cos(x)e^x], [\sin(x)e^x]\right)$.

1. Montrer que H est stable par dérivation.
2. Montrer que $H = vect\left(\left[e^{(1+i)x}\right], \left[e^{(1-i)x}\right]\right)$.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Est ce que Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est une CL sur $\overrightarrow{v} = (3, -7, 0)$ et $\overrightarrow{w} = (2, 1, 0)$?

Si on regarde la dernière coordonnée, on "voit" que ce n'est pas possible

On va faire un RA

On suppose que : $\exists, \lambda,\ \mu$ tel que : $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}$

Ainsi $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda + 2\mu \\ 3\lambda - 7\mu \\ O \end{pmatrix}$

Donc $4 = O$ Oups

Conclusion : Le vecteur $\overrightarrow{u} = (2, 3, 4)$ n'est pas une CL sur $\overrightarrow{v} = (3, -7, 0)$ et $\overrightarrow{w} = (2, 1, 0)$

2. Est ce que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est une CL sur $(1, 2, -3)$ et $(-1, 5, -4)$?

On cherche $\lambda,\ \mu$ tel que : $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}$

On a $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ 2\lambda + 5\mu \\ -3\lambda - 4\mu \end{pmatrix}$

Donc on résout/trigonalise le système

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 1 \\ 2\lambda + 5\mu = 2 \\ -3\lambda - 4\mu = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda - \mu = 1 \\ O\lambda + 7\mu = 0 \\ O\lambda - 4\mu = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda - \mu = 1 \\ O\lambda + 7\mu = 0 \\ O = -1 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas une CL sur $(1, 2, -3)$ et $(-1, 5, -4)$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n$ est une CL sur A et I_2.

La question est : Montrer que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_n, \mu_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = \lambda_n A + \mu_n I_2$

On démontre par récurrence

$H_{<n>}$: il existe $\lambda_n, \mu_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = \lambda_n A + \mu_n I_2$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. On a le calcul suivant

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(3x) &= \cos(2x + x) \\ &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\ &= (CC - SS)C - (SC + CS)S \\ &= C^3 - 3CS^2 \\ &= C^3 - 3C(1 - C^2) = 4C^3 - 3C \end{aligned}$$

Interprétation/Conclusion : $[\cos(3x)] = 4[\cos^3(x)] + 0[\cos^2(x)] + 3[\cos(x)] + 0[1]$

2. On a le calcul suivant

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) &= CC = \textit{Trop de Produit} \\ &= \frac{1}{2}\cos(x + x) + \frac{1}{2}\cos(x - x) \\ &= \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Interprétation/Conclusion : $[\cos^2(x)] = \frac{1}{2}[\cos(2x)] + \frac{1}{2}[1]$

3. Idem

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Montrer que : $[sin(2x)]$ n'est pas une CL sur $[\sin(x), \cos(x)]$.
   On fait un R.A.
   On suppose que la fonction $[sin(2x)]$ est une CL sur $[\sin(x), \cos(x)]$
   CàD il existe λ, μ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = \lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$

   $$\boxed{\text{On cherche OUPS}}$$

   J'applique l'égalité avec $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$,
   Ainsi on a $\sin(2.0) = \lambda \sin(0) + \mu \cos(0) \implies \mu = 0$
   et $\sin\left(2.\dfrac{\pi}{2}\right) = \lambda \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \mu \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \implies \lambda = 0$
   Donc on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = 0$ Oups ! ! ! (par exemple avec $x = {}^{\pi}/_{4}$)

2. Est ce que $[|t|]$ est une CL sur $[t], [t^2]$?
   On fait un R.A.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{X^2 - 5X + 6}$ et interpréter le résultat en terme de CL.

Étape 1. On commence par factoriser le polynôme.

On trouve avec le discriminant que : $x^2 - 5x + 6 = 1(x-2)(x-3)$

Étape 2. On trouve $a, b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}$$

Pour déterminer, on fait au plus simple, CàD
$\dfrac{1}{x^2-5x+6} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x-3} \iff \dfrac{1}{x^2-5x+6} = \dfrac{a(x-3)+b(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{(a+b)x - 3a - 2b}{(x-2)(x-3)}$
Je choisis $a + b = 0$ et $-3a - 2b = 1$ donc $b = 1$ et $a = -1$

$$\text{Conclusion : on a } \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

Interprétation/Conclusion : La fraction $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ est une CL sur les fraction "plus simples" $\dfrac{1}{x-2}$ et $\dfrac{1}{x-3}$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

Solution niveau 0.

$$\text{On a facilement : } M \in H \iff \text{on peut écrire } M = a\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=B}$$

$O \in H$?

On a : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\,A + 0\,B$

CL ?

Pour tout λ, μ et $M, M' \in H$, on a

$$\begin{aligned} \lambda M + \mu M' &= \lambda (a\,A + b\,B) + \mu \left(a'\,A + b'\,B\right) \\ &= \underbrace{\left(\lambda\,a + \mu\,a'\right)}_{\in\mathbb{R}} A + \underbrace{\left(\lambda\,b + \mu\,b'\right)}_{\in\mathbb{R}} B \in H \end{aligned}$$

Conclusion : H est un ssev

Solution niveau 1.

On va ssev et famille qui dirige en un seul coup

$$\boxed{\text{On va montrer que : } H = vect(....)}$$

On a

$$\begin{aligned} M\in H &\iff M=\begin{pmatrix} 2a+b & b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &\iff M=a\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff M\in vect\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A},\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=B}\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $H=vect(A,B)$ ainsi H est le ssev dirigé par les matrices A,B.

Solution de l'exercice 12 (Énoncé)

Solution niveau 0.

On a facilement : $f\in H \iff f$ est une fonction dérivable et $y'+xy=0$.

$O\in H$?

La fonction nulle est dérivable vérifie $O'+xO=0$ donc $O\in H$

CL ?

Pour tout λ,μ et $f,g\in H$. $\lambda f+\mu g$ est bien une fonction dérivable et

$$[\lambda f+\mu g]'+x[\lambda f+\mu g]=\lambda\underbrace{(f'+xf)}_{=0}+\mu\underbrace{(g'+xg)}_{=0}=0$$

Conclusion : H est un ssev

Solution niveau 1.

On va ssev et famille qui dirige en un seul coup

$$\boxed{\text{On va montrer que : } H=vect(....)}$$

On a

$$\begin{aligned} f\in H &\iff \text{la fonction } f \text{ vérifie } y'+xy=0 \\ &\iff y'+xy=0 \\ &\iff \left[ye^{x^2/2}\right]'=0 \\ &\iff \exists k \text{ tel que } \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=k.e^{-x^2/2} \\ &\iff y\in vect\left(\left[h:x\longmapsto e^{-x^2/2}\right]\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $H=vect(h)$ ainsi H est le ssev dirigé par la fonction h

Solution de l'exercice 24 (Énoncé) On va ssev et famille qui dirige en un seul coup

$$\boxed{\text{On va montrer que : } H=vect(....)}$$

On a

$$\begin{aligned} P\in H &\iff P=aX^3+bX^2+cX+d \ et\ P(1)=0 \\ &\iff a+b+c+d=0 \\ &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow X^3 \\ \leftarrow X^2 \\ \leftarrow X^1 \\ \leftarrow X^0 \end{matrix} \\ &\iff P=b\underbrace{(-X^3+X^2)}_{=A}+c\underbrace{(-X^3+X)}_{=B}+d\underbrace{(-X^3+1)}_{=C} \\ &\iff P\in vect(A,B,C) \end{aligned}$$

Conclusion : $H=vect(A,B,C)$ ainsi H est un ssev et la famille (A,B,C) dirige le ssev H.