Base, Dimension.

1 Famille libre, famille liée.

Définition 1. Libre-Lié

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E.

Famille libre.

On dit que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est libre

Ssi $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,
$$\left[\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0\right]$$

Généralisation : On dit que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est libre Ssi
$$\left[\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0\right]$$

Méthodologie : La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est libre

Ssi l'équation $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ admet une unique solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Famille liée.

On dit que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée Ssi elle n'est pas libre,

Ssi il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, non tous nul tel que : $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$

Théorème 2. Libre/Liée et CL

Lié et CL

> La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée

Ssi on peut compléter les "pointillés" .... $\vec{u}$ + ... $\vec{v}$ + ... $\vec{w} = \vec{0}$

> La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée

Ssi un des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ ou $\vec{w}$ est CL des autres

Libre et CL Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E.

> Quand une famille est libre alors on peut identifier les scalaires, CàD

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{u_k} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \overrightarrow{u_k} \\ \textit{la famille } (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}) \textit{ est libre}\end{array}\right\} \Longrightarrow \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \alpha_k = \beta_k$$

> Quand une famille est liée, c'est faux

$$1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Démonstration :

On suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{u_k} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \overrightarrow{u_k}$ et que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ est libre

$$\boxed{\text{On va montrer que : } \forall\, k \in \{1, 2, .., n\},\ \alpha_k = \beta_k}$$

On a $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{u_k} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \overrightarrow{u_k}$

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) \overrightarrow{u_k} = \vec{0}$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) \overrightarrow{u_k} = \vec{0}$ **ET** la famille est libre

donc on a $\forall\, k \in \{1, 2, .., n\},\ \alpha_k - \beta_k = 0 \Longleftrightarrow \alpha_k = \beta_k$.

2 Théorèmes qui concluent : libre ou liée

2.1 Sans rien faire.

Théorème 3.
Une famille qui contient le vecteur nul est forcément liée.

Démonstration : On considère la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{0})$.
on a

$$...... \overrightarrow{u_1} + ... \overrightarrow{u_2} + \cdots + ... \overrightarrow{u_{n-1}} + ... \overrightarrow{u_n} + ... \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

Donc la famille est liée.

Définition 4. Non-colinéaire
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs de E.

> On dit que $\overrightarrow{u}$ est proportionnel à $\overrightarrow{v}$

Ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$

> On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires (notée //) à
Ssi $\overrightarrow{u}$ est proportionnel à $\overrightarrow{v}$ OU $\overrightarrow{v}$ est proportionnel à $\overrightarrow{u}$

Théorème.
Deux vecteurs non nuls et non colinéaires sont libres.

Définition 5. Famille en escalier
Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, ...$ des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On dit que la famille $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, ...$ est en escalier Ssi chaque vecteur est $\neq \overrightarrow{0}$ et chaque vecteur plus "court" que le précédent.

Théorème.
Une famille en escalier est libre.

Exemples : les familles suivantes sont en escalier

$$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right] \quad \left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right] \quad \left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]$$

2.2 Avec le Déterminant.

Théorème 6.

$\det(famille) \neq 0 \iff$ la famille est libre

$\det(famille) = 0 \iff$ la famille est liée

2.3 Avec le degré 2 à 2 $\neq$.

Théorème 7. Polynôme de degré 2 à 2 différents
Soit $(P_0, P_1, ..., P_n)$ une famille de polynôme avec des degrés 2 à 2 différents,

Alors la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est libre.

`Situation classique :` Si $\forall k \in \{0, 1, 2, .., n\}$, $\deg P_k = k$
alors la famille est libre.

`Généralisation :` Si les ordres de grandeurs sont 2 à 2 $\neq$,....

3 Famille génératrice.

Définition 8. Famille génératrice

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

Soit $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteur de E.

On dit que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est une famille génératrice de F Ssi

$$F = vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$$

Théorème 9. Opérations complémentaires sur les vect(....)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{A}$ des vecteurs de E.

> Le CL n'augmente pas le vect.

$$\left.\begin{array}{c} H = vect\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{A}\right) \\ \overrightarrow{A} = CL(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \end{array}\right\} \Longrightarrow H = vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$$

> Le vect(...) n'est pas modifié par pivot

On modifie $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ avec le pivot $\overrightarrow{A}$,

par exemple $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{A}$ de même $\overrightarrow{v'} = ...$ et $\overrightarrow{w'} = ...$

On a alors $vect\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{A}\right) = vect\left(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{w'}, \overrightarrow{A}\right)$

4 Base, Coordonnées, Vecteur des coordonnées.

Définition 10. Base

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ une famille génératrice de E

On dit que la famille $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est une base de E
Ssi la famille est libre et génératrice de E.

Les bases et dimensions classiques qu'il faut connaitre.

Il faut connaitre

> $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est la base classique de $\mathbb{R}^3$

Ici on a $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$,, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$.

> $(\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{E_3})$ est la base classique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

On a $\overrightarrow{E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{E_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{E_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

> $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ est la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On a $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,....

Ainsi $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = cardinale(Base) = 4$

> $(X^0, X^1, ..., X^n)$ est la base classique de $\mathbb{R}_n[X]$.

$(X^0, X^1, ..., X^{641}, ..., X^{2020}, ...)$ est la base classique de $\mathbb{R}[X]$.

Ainsi $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = cardinale(Base) = n+1$

Ainsi $\dim(\mathbb{R}[X]) = cardinale(Base) = \infty$

Théorème 11. Coordonnées et matrice des coordonnées

$$\left.\begin{array}{c}\vec{u}\in E\\ \mathscr{B}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n}) \text{ est une base de } E\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{il existe } u_1,\dots,u_n\\ \text{tels que } \vec{u}=u_1\,\vec{e_1}+\cdots+u_n\,\vec{e_n}\\ \text{et de plus les scalaires sont uniques.}\end{array}$$

Vocabulaire : Les scalaires $u_1,\dots,u_n$ sont les *coordonnées* du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Matrice colonne des coordonnées

La matrice colonne des coordonnées $\vec{U}=\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(\vec{u})=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\leftarrow\vec{e_1}\\\leftarrow\vec{e_2}\\\vdots\\\leftarrow\vec{e_n}\end{array}\end{array}$

Démonstration : On va faire Les scalaires sont uniques puis ils existent

Les scalaires sont uniques ?

On suppose que $\vec{u}=u_1\,\vec{e_1}+\cdots+u_n\,\vec{e_n}$ et $\vec{u}=u'_1\,\vec{e_1}+\cdots+u'_n\,\vec{e_n}$

$\boxed{\text{On va montrer que } u_1=u'_1,\ u_2=u'_2,\dots.}$

On sait que

$$\left.\begin{array}{c}\vec{u}=u_1\,\vec{e_1}+\cdots+u_n\,\vec{e_n}=u'_1\,\vec{e_1}+\cdots+u'_n\,\vec{e_n}\\ \text{la famille } (\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n}) \text{ est libre}\end{array}\right\}\Longrightarrow u_1=u'_1,\ u_2=u'_2,\dots.$$

Les scalaires existent ?

Comme $(\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n})$ est une base, la famille est donc génératrice de E, CàD $E=vect(\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n})$, ainsi on a

$$\left.\begin{array}{c}\vec{(}u)\in E\\ E=vect(\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n})\end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{array}{l}\text{il existe } u_1,\dots,u_n\\ \text{tels que } \vec{u}=u_1\,\vec{e_1}+\cdots+u_n\,\vec{e_n}\end{array}$$

Théorème 12. Formulaire sur les matrices de coordonnées

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $\vec{u_1},\vec{u_2},\dots,\vec{u_n},\vec{v}$ des vecteurs de E et $\vec{U_1},\vec{U_2},\dots,\vec{U_n},\vec{V}$ leur matrice colonne.

On a

> La matrice de $2\vec{u}-3\vec{v}$, c'est $2\vec{U}-3\vec{V}$.

> $(\vec{u_1},\vec{u_2},\dots,\vec{u_n})$ est libre (resp. base) Ssi $(\vec{U_1},\vec{U_2},\dots,\vec{U_n})$ est libre (resp. base)

Démonstration : On a $2\vec{u}-3\vec{v}=2(u_1\vec{e_1}+\cdots+u_n\vec{e_n})-3(v_1\vec{e_1}+\cdots+v_n\vec{e_n})=[\dots]\vec{e_1}+\cdots+[\dots]\vec{e_n}$.

Donc on a la matrice de $2\vec{u}-3\vec{v}$, c'est bien $2\vec{U}-3\vec{V}$.

Comme le coordonnées des vecteurs sont uniques, on a $\vec{u}=\vec{0}\iff\vec{U}=\vec{0}$

Ainsi $\underbrace{\lambda_1\vec{u_1}+\cdots+\lambda_n\vec{u_n}}_{\vec{u}}=\vec{0}\iff\underbrace{\lambda_1\vec{U_1}+\cdots+\lambda_n\vec{U_n}}_{\vec{U}}=\vec{0}$. On en déduit le deuxième point avec $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$.

5 L'algorithme de Gauss et rang d'une famille.

Définition 13. Les transformations de Gauss

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ une famille de E.

Transformation n°1 : Dilatation par des scalaires $\alpha_i \neq 0$

$$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\dots,\overrightarrow{e_n}) \rightsquigarrow\rightsquigarrow (\alpha_1\,\overrightarrow{e_1},\alpha_2\,\overrightarrow{e_2}\dots,\alpha_n\,\overrightarrow{e_n})$$

Transformation n°2 : On échange de deux vecteurs

$$(\dots,\overrightarrow{e_i},\dots,\overrightarrow{e_j},\dots) \rightsquigarrow\rightsquigarrow (\dots,\overrightarrow{e_j},\dots,\overrightarrow{e_i},\dots)$$

Transformation n°3 : On choisit un pivot et avec ce pivot,

Avec ce pivot, on modifie les autres vecteurs.

Théorème 14. L'algorithme de Gauss

Par une succession de transformation de Gauss,

on peut transformer une famille en une famille en escalier

avec souvent à la fin des vecteurs nuls

À l'issue de l'algorithme de Gauss, on peut conclure

> On peut savoir si la famille est libre ou liée.

> On n'a pas changé le vect.

> On obtient une base du vect compléter par des vecteurs nuls.

Démonstration : Pour chaque transformation de Gauss, on a $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\dots,\overrightarrow{e_n}) \rightsquigarrow (\overrightarrow{e'_1},\overrightarrow{e'_2}\dots,\overrightarrow{e'_n})$

On démontre pour chaque transformation avec $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$ ou $\subset$ et $\supset$ que

> $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\dots,\overrightarrow{e_n})$ est libre $\Longleftrightarrow$ $(\overrightarrow{e'_1},\overrightarrow{e'_2}\dots,\overrightarrow{e'_n})$ est libre.

> $vect(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\dots,\overrightarrow{e_n}) = vect(\overrightarrow{e'_1},\overrightarrow{e'_2}\dots,\overrightarrow{e'_n})$

A la fin, on a une base du vect car on n'a pas changé le vect donc la famille est génératrice et comme elle est en escalier elle est libre.

Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\vec u}\underbrace{\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}}_{\vec v}\underbrace{\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}}_{\vec w} \underset{\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow}{\overset{C_2-4C_1\twoheadrightarrow C_2}{C_3-5C_1\twoheadrightarrow C_3}} \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\-3\\-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\-4\\-8\end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow}{C_3-{}^4/_3\,C_2\twoheadrightarrow C_2} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\vec{u'}}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}}_{\vec{v'}}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\\mathbf{0}\\0\end{pmatrix}}_{\vec{w'}}$$

Suite à l'algorithme de Gauss, on peut conclure

> Comme à la fin $\overrightarrow{w'} = \vec 0$, la famille initiale $(\vec u,\vec v,\vec w)$ est liée.

$$\text{En effet, on a }\ \underline{1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\underline{-4}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+\underline{3}\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

> On n'a pas changé le vect, donc $vect(\vec u,\vec v,\vec w) = vect(\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'},\overrightarrow{w'}) = vect(\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'},\vec 0)$

$$\text{Et surtout } (\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'},\cancel{\vec 0}) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix} \text{ est une base de } H = vect(\vec u,\vec v,\vec w)$$

Conclusion : H est dirigé par 2 vecteurs non // donc H est un plan vectoriel.

Définition 15. Rang d'une famille de vecteur

Le rang de la famille $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ est, noté $rg\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots\right)$,

égale au nombre de vecteur non-nul qu'il reste à l'issu d'un algorithme de Gauss.

Théorème.
$rg\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots\right)$ = dimension du ssev $vect\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots\right)$

6 Dimension d'un espace vectoriel.

6.1 Toutes les Bases ont le même cardinal.

Théorème 16. Trop nombreux $\implies$ lié

> 2 vecteurs sur une même droite vectorielle sont proportionnelles donc liés.

> 3 vecteurs dans un même plan vectoriel sont liés (faites un dessin, c'est évident).

Dans un espace engendré par n vecteurs,
une famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Démonstration : Le résultat se démontre par récurrence sur n le nombre de vecteur.
Il est clair que si 2 vecteurs sont dans $vect(\vec{a})$ alors ils sont colinéaires et donc liés; ainsi l'initialisation est faite.
On fait l'hérédité. On suppose que $(\vec{y_1}, \dots, \overrightarrow{y_{n+2}})$ sont dans $vect(\vec{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_{n+1}})$.

$$Ainsi\ \vec{y_i} = a_{i1}\,\vec{e_1} + \dots + a_{i,n+1}\,\overrightarrow{e_{n+1}}$$

Si $\vec{y_1} = \vec{0}$, la famille est liée et c'est fini.
Si $\vec{y_1} \neq \vec{0}$ alors une des coordonnées est $\neq 0$ par exemple $a_{1p} \neq 0$. Suivant l'idée de Gauss, on modifie $\vec{y_2}, \dots, \overrightarrow{y_{n+2}}$ et on considère

$$\forall i \in \{2,3,\dots,(n+2)\},\ \vec{y_i'} = \vec{y_i} - \frac{a_{ia}}{a_{1p}}\vec{y_1} = \dots\vec{e_1} + \dots + 0\,\vec{e_p} + \dots\overrightarrow{e_{n+1}}$$

A cause de l'hypothèse de récurrence, on sait que la famille $(\vec{y_i'})_{2\leqslant i\leqslant n+2}$ est liée ainsi il y a une CL = $\vec{0}$ qui permet de construire pour les $(\vec{y_1}, \dots, \overrightarrow{y_{n+2}})$ une CL = $\vec{0}$. la famille est donc liée.

Théorème 17. Cardinal des Bases

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On suppose que $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ et $\mathscr{C} = (\vec{e_1'}, \dots, \vec{e_p'})$ sont deux bases de E.

Alors $card(\mathscr{B}) = n = p = card(\mathscr{C})$

Démonstration : On démontre avec un RA que $n \leqslant p$.
On suppose que $n > p$.

> On sait que $\mathscr{C}$ est une base de E, donc elle engendre (dirige) E.

> Comme $n > p$, on a une famille $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ qui contient "trop" de vecteurs dans un espace vectoriel engendré par p vecteurs donc elle est liée.

> Or $\mathscr{B}$ est une base donc elle est libre.

Conclusion : La famille $\mathscr{B}$ est est libre et liée. OUPS

On démontre de même que $p \leqslant n$.

6.2 Dimension d'un espace vectoriel.

Définition 18. Dimension d'un ev, d'un ssev

On vient de justifier que toute les bases d'un espace vectoriel E ont le même cardinal.
Par définition, c'est la dimension de E.

$$\dim(E) \overset{def}{=} \textit{Cardinal d'une base}$$

Attention : $\dim(E) = Cardinal\ \underset{\sim\sim\sim}{de\ n'importe\ laquelle}\ des\ bases\ de\ E$.

`Cette définition s'utilise dans les 2 sens, CàD`

> Si on a trouvé une base de E alors on peut conclure que $\dim(E) = \ldots$

> Si on sait que $\dim(E) = n$,
alors les bases de E sont de cardinal exactement n (pas plus, pas moins).

Les dimensions classiques qu'il faut connaitre.

> Comme $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base de $\mathbb{R}^2$, on a $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

> Comme $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a $\dim(\mathbb{R}^2) = 3$.

> Comme $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on a $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

> Comme $\left((M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.

> Comme $(X^0, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on a $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$.

> Comme $(X^0, X, \ldots, X^n, \ldots)$ est une base de $\mathbb{R}[X]$, on a $\dim(\mathbb{R}[X]) = \infty$.

7 Théorèmes de la Base incomplète et Base extraite.

Théorème 19. Fabriquer des Bases

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit $(\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n})$ une famille génératrice de E et $(\overrightarrow{y_1},...,\overrightarrow{y_r})$ est une famille libre.

Le théorème de la base incomplète.

Toute famille libre d'un espace vectoriel E se complète en une base.

Plus précisément on peut compléter la famille $(\overrightarrow{y_1},...,\overrightarrow{y_r})$ avec des vecteurs choisis parmi les (e_i) et ainsi d'obtenir une base E.

CàD

Le théorème de la base extraite.

De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

Démonstration :

Démonstration du théorème de la base incomplète.

On considère toutes les familles libres fabriquées à partir de $(\overrightarrow{y_1},...,\overrightarrow{y_r})$ et aumentées avec des vecteurs choisis dans $(\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n})$. elles sont toutes de cardinal $\leqslant n+r$.

Cet ensemble n'est pas vide car la famille $(\overrightarrow{y_1},...,\overrightarrow{y_r})$ étant libre, elle est dans l'ensemble. Ainsi cet ensemble est non vide et constitué d'un nombre fini de famille. Donc il y en a une qui a un cardinal maximal.

On va montrer que la famille libres de cardinal maximal, noté $\mathscr{B}$, est une base.

La famille $\mathscr{B}$ est libre par construction.

On va montrer qu'elle est génératrice, CàD que $E = vect(\mathscr{B})$.

> L'inclusion est $\supset$ est facile, avec la grande propriété des $vect$

> Pour l'inclusion est $\subset$. On utilise $E = vect(\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n})$, la grande propriété des vect et aussi le fait que $\mathscr{B}$ est la famille cardinal maximal (ainsi $\mathscr{B} \cup e_k$ est forcément liée et $\mathscr{B}$ est libre donc $e_k = CL$ *sur les vecteurs de* $\mathscr{B}$).

Démonstration du théorème de la base extraite.

On applique le théorème avec à la place de $(\overrightarrow{y_1},...,\overrightarrow{y_r})$, une famille vide

Théorème 20. Formulaire sur les dimensions.

$$\begin{array}{ccccc} card(Libre) & \leqslant & card(Base) & \leqslant & card(Génératrice) \\ & & \shortparallel & & \\ & & \dim(E) & & \end{array}$$

$$\text{Et aussi : } card(Base) \underset{Strict}{<} card(\text{Génératrice et Liée})$$

Démonstration : Une famille libre se complète en une base et en la complétant son cardinal augmente donc $card(Libre) \leqslant card(Base)$.

De même le théorème de la bas extraite permet de conclure que : $card(Base) \leqslant card(Géné)$

8 Avec les Dimension (Thm niveau 2).

8.1 Libre + cardinal.

Théorème 21.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\dim(E) = n$.

Soit $\mathscr{B}$ une famille de vecteur de E.

On a

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{B} \textit{ est une famille libre de } E \\ \\ card(\mathscr{B}) = \dim(E) = n < \infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{B} \textit{ est une base de } E$$

Attention : Le théorème est faux si $card(\mathscr{B}) = \dim(E) = \infty$.

Il y aussi mais c'est moins utile

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{B} \textit{ est une famille génératrice} \\ \\ card(\mathscr{B}) = n < \infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{B} \textit{ est une base de } E$$

Démonstration : Une famille libre se complète en une base et en la complétant son cardinal augmente donc $card(Libre) \leqslant card(Base)$.

De même le théorème de la bas extraite permet de conclure que : $card(Base) \leqslant card(Géné)$

Démonstration : Deux considérations préalable.

> Une famille libre se complète en une base et en la complétant son cardinal augmente et donc $card(Libre) \leqslant card(Base)$.

> De plus si la famille libre n'est pas une base alors l'inégalité est stricte .

On fait un RA : Si $card(Libre) = n$ et la famille libre n'est pas une base alors avec le théorème de la base incomplète, on obtient une base avec un cardinal $> n = \dim E$ Absude!!

8.2 Inclusion et dimension.

Théorème 22.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F, G deux sous espaces vectoriels de E.

$$\text{Alors } F \subset G \Longrightarrow \dim(F) \leqslant \dim(G).$$

Application : comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, les ssev de $\mathbb{R}^3$ sont de dimension 0, 1, 2 ou 3.

Démonstration : Une base $\mathscr{B}_F$ de F est une famille libre de E et

$$ainsi \qquad \dim F = card(\mathscr{B}_F) = card(Libre_E) \leqslant card(base_E) = \dim E$$

Théorème 23.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F, G deux sous espaces vectoriels.

Attention : $\dim F = \dim G \not\Longrightarrow F = G$, par contre

$$\left.\begin{array}{r}F \subset G \\ \\ \dim(F) = \dim(G) < \infty\end{array}\right\} \Longrightarrow F = G$$

Attention : Le théorème est faux si $\dim(F) = \dim(G) = \infty$.

Applications :

Si F est un ssev de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 alors $F = \mathbb{R}^3$.

Si F est un ssev de dimension 0 alors $F = \{\overrightarrow{0}\}$.

Démonstration : Comme $F \subset G$, une base $\mathscr{B}_F$ de F est une famille libre de G.

De plus $card(\mathscr{B}_F) = \dim F = \dim G$, ainsi

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{B}_F \textit{ est une famille libre de } G \\ \\ card(\mathscr{B}_F) = \dim G < \infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{B}_F \textit{ est une base de } G$$

Conclusion : $F = vect(B_F) = G$.

9 Exemples de calculs de dimension.

Théorème 24. EDL_1

Soit E l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.

$$y' + \tau y = 0 \textit{ avec } \tau \in \mathbb{R}.$$

Alors E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension 1.

Démonstration :

On sait que y *est une solution de* (E) $\iff y' + \tau y = 0$

$\iff \exists \lambda,\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda \exp(-{}^{t}/_{\tau})$

$\iff [y] = \lambda [\exp(-{}^{t}/_{\tau})]$

Comme les scalaires sont qcq et indépendants

Ainsi $E = vect\left[\exp\left(-{}^{t}/_{\tau}\right)\right]$

Conclusion : E est un $vect(...)$ donc c'est ssev. De plus il est engendré par un vecteur non nul, donc $\dim(E) = 1$.

Théorème 25. EDL_2

Soit E l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

$$ay'' + by' + cy = 0 \textit{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Alors E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension 2.

Démonstration : Je fais la démonstrations dans la situation où le discriminant de l'équation caractéristique est $\neq 0$.

On sait que y *est une solution de* (E) $\iff ay'' + by' + cy = 0 = 0$

$\iff \exists \lambda, \mu,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda \exp(rx) + \mu \exp(r'x)$

$\iff [y] = \lambda [\exp(rx)] + \mu [\exp(r'x)]$

Comme les scalaires sont qcq et indépendants

Ainsi $E = vect\left([\exp(rx)], [\exp(r'x)]\right)$

Conclusion : E est un $vect(...)$ donc c'est ssev. De plus il est engendré par 2 vecteurs non nuls et non //, donc $\dim(E) = 2$.

Théorème 26. Suite d'ordre 2 classique

Soit E l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n = 0 \textit{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Alors E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2.

Démonstration : Je fais la démonstrations dans la situation où le discriminant de l'équation caractéristique vaut 0.

On sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une solution de* (E) $\iff \forall n \in \mathbb{N},\ a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n = 0$

$\iff \exists \lambda, \mu,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$

$\iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda (r^n) + \mu (nr^n)$

Comme les scalaires sont qcq et indépendants

Ainsi $E = vect\left((r^n), (nr^n)\right)$

Conclusion : E est un $vect(...)$ donc c'est ssev. De plus il est engendré par 2 vecteurs non nuls et non //, donc $\dim(E) = 2$.

10 Exercices

Petite Dimension

Exercice 1. [Correction]

1. Discuter selon les paramètres $u, v \in \mathbb{R}$, si la famille

$$\overrightarrow{a} = (u, 2, 0),\ \ \overrightarrow{b} = (v, 0, -1),\ \ \overrightarrow{c} = (0, 2u, v)$$

   est libre ou liée et quand elle est liée, expliciter une CL nulle.

2. Déterminer, dans les différentes situations, $\dim\left[vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\right]$.

Exercice 2. [Correction] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille $\left(I_2, A, A^2\right)$ liée.
   Déterminer $\dim vect\left(I_2, A, A^2\right)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\dim vect\left(I_2, A, A^2, ..., A^n\right)$.

Exercice 3. [Correction] On considère les polynômes

$$P_1 = (X-2)(X-3) \quad P_2 = (X-1)(X-3) \quad P_3 = (X-1)(X-2)$$

1. Montrer la famille $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est libre puis que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Expliciter les coordonnées de $[X^0]$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 4.

1. Montrer que la famille $(\ [1], [\cos(x)], [\cos(2x)]\ )$ est libre.
2. Montrer que la famille $\left(\ [1], [\cos(x)], \left[\cos^2(x)\right]\ \right)$ est libre.
3. Montrer que la famille $\left(\ [1], [\cos(x)], [\cos(2x)], \left[\cos^2(x)\right]\ \right)$ est liée.

Exercice 5. la famille $\left([1], \overrightarrow{id}, \overrightarrow{\cos}, \overrightarrow{\arctan}\right)$ est-elle libre ou liée ?

Exercice 6.

1. Soit $H = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ \textit{tel que}\ tr(M) = 0\right\}$.
   Montrer que H est un ssev et déterminer une base de H.
2. Soit $G = \left\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ \textit{tel que}\ M^T = M\right\}$.
   Montrer que G est un ssev et déterminer une base de H.

Exercice 7. [Correction]

1. Soit $H = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X],\ \textit{tel que}\ 3P = (X+1)P'\right\}$.
   Montrer que H est un ssev et déterminer une base de H.
2. Soit $G = \left\{P \in \mathbb{R}_4[X],\ \textit{tel que}\ P(1) = P(2) = 0\right\}$.
   Montrer que G est un ssev et déterminer une base de H.

Exercice 8. [Correction] Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$.

On note H l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

1. Traduire $M \in H$. Calculer AM et MA.
2. Montrer que H est un ssev de $M_2(\mathbb{R})$ et déterminer une base de H.
3. Montrer que (I_2, A) est une autre base de H.
4. En déduire que A^2 et A^{-1} sont des CL sur (I_2, A).

Grande Dimension

Exercice 9. [Correction]

1. On considère les fonctions $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = e^{kx}$ *avec* $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$
   Montrer que la famille $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une famille libre.
2. On considère les polynômes $P_i = X^i(X-1)^{n-i}$ *avec* $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$
   Montrer que la famille $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que la famille $\big([1], [\sin(X)], [\sin^2(X)], \dots, [\sin^n(X)]\big)$ est libre.

Exercice 10. [Correction] Déterminer une base et la dimension de

$$H = \left\{ \overrightarrow{u} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_1 + 2x_2 + \cdots + n\,x_n = 0 \right\}$$

Exercice 11. [Correction]

1. Quels est la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
   Pourquoi la famille $\left(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2}\right)$ est-elle liée. Que peut-on conclure ?

Exercice 12. [Correction] On considère les polynômes

$$L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n+1} (X-k) \qquad \textit{avec } i \in \{0,1,2,\dots,n\}$$

1. Explicité L_0 et L_1.
2. Soit $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$.
   Déterminer le degré de L_i.
   Peut-on en déduire que la famille $\mathscr{B} = (L_0, L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer $\mathscr{B} = (L_0, L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Expliciter les coordonnées de $[1]$ dans la base $\mathscr{B}$. Généraliser pour P qcq dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 13. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Quels est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$?
2. Soit P un polynôme de degré n.
   Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer le degré de $P(X+k)$
   Justifier que la famille $\Big[P(X),\, P(X+1),\, P(X+2), \cdots, P(X+n), P(X+n+1)\Big]$ est liée.

Exercice 14. On considère

$$C_n = \{1, \cos(X), \cos(2X), \dots, \cos(nX)\} \text{ et } F_n = vect(C_n)$$
$$\mathfrak{C}_n = \left\{1, \cos(X), \cos^2(X), \dots, \cos^n(X)\right\} \text{ et } \mathfrak{F}_n = vect(\mathfrak{C}_n)$$

1. Base et dimension de $\mathfrak{F}_n$.
   Montrer que $\mathfrak{C}_n$ est une base de $\mathfrak{F}_n$. Que peut-on conclure ?
2. Base et dimension de F_n.
   (a) Discuter selon $p, q \geqslant 0$ la valeur de $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos pt \cos qt\, dt$
   (b) Montrer que C_n est une base de F_n. Que peut-on conclure ?
3. Montrer que $F_n \subset \mathfrak{F}_n$ puis que $F_n = \mathfrak{F}_n$

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On a $det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ... = 2u^2 - 2v^2$

   > Lorsque $det(...) = 0 \iff u = v \ ou \ u = -v$ la famille est liée.
   > Lorsque $det(...) \neq 0 \iff u \neq v \ ou \ u \neq -v$ la famille est libre.

2. On note $H = vect(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

   > Lorsque $det(...) \neq 0 \iff u \neq v \ ou \ u \neq -v$.

   La famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est libre et génératrice de H donc c'est une base de H
   Ainsi $\dim(H) = cardinal(Base) = 3$.

   > Lorsque $det(...) = 0 \iff u = v \ ou \ u = -v$

   La famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est liée et génératrice de H donc $\dim(H) \leqslant 3 - 1 = 2$.
   De plus, $(\vec{a}, \vec{b})$ est une famille de H libre car $\neq 0$ et non// Donc $\dim(H) \geqslant 2$

   Conclusion : $\dim(H) = 2$ et la famille $(\vec{a}, \vec{b})$ est une base de H.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On a facilement $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + cd \\ ba + db & bc + d^2 \end{pmatrix}$

   On complète

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + cd \\ ba + db & bc + d^2 \end{pmatrix} = \ldots\ldots \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \ldots\ldots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (a + d) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + (bc - ad) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Ainsi la famille est liée.

2. On note $H = vect\left(I_2, A, A^2\right)$. On a

   > H est dirigée par une famille **liée** de 3 vecteurs
   Donc $\dim(H) \leqslant 3 - 1 = 2$

   > Comme (I_2, A) est une famille de H libre car $\neq 0$ et non//
   Donc $\dim(H) \geqslant 2$

   Conclusion : $\dim(H) = 2$ et la famille (I_2, A) est une base de H.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Les polynômes sont tous de degré 2.
2. On utilise : libre et dimension=cardinal.

Libre ?

On étudie l'équation vectorielle $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$

$\boxed{\text{On va montrer que } a = b = c = 0.}$

On a que : $\forall x \in \mathbb{R},\ aP_1(x) + bP_2(x) + cP_3(x) = 0$

On applique en $x = 1,\ x = 2,\ x = 3$ et on conclut.

Conclusion

$$\left.\begin{array}{r} \mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3) \text{ est une famille libre de } H \\ \\ cardinal(\mathscr{B}) = 3 \\ \\ \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 < \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]$$

3. Tout d'abord on justifie que la CL existe.

$$\left.\begin{array}{r} \mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X] \\ \\ 1 \in \mathbb{R}_2[X] \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{il existe a,b,c tel que} \\ \quad aP_1(X) + bP_2(X) + cP_3(X) = X^0 \end{array}$$

Puis on calcule les scalaires.

> J'applique l'égalité en $x = 1$, ainsi $a(1-2)(1-3) + 0 + 0 = 1$
> donc $a = \dfrac{1}{2}$

> Pour calculer b et c avec $x = 2$ et $x = 3$.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. Classique

$$\begin{aligned}
P\in H &\iff P\in\mathbb{R}_3[X] \ \ et \ \ 3P=(X+1)P' \\
&\iff P=a+bX+cX^2+dX^3 \ \ et \ \ 3P=(X+1)P' \\
&\iff 3(a+bX+cX^2+dX^3)=(X+1)(b+2cX+3dX^2) \\
&\iff 3a+3bX+3cX^2+3dX^3=b+X\,[b+2c]+X^2\,[2c+3d]+X^3\,[3d] \\
&\iff \begin{cases} 3a &= b \\ 3b &= b+2c \\ 3c &= 2c+3d \\ 3d &= 3d \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3a-b &= 0 \\ 2b-2c &= 0 \\ c-3d &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \\
&\iff \overrightarrow{Sol}=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=d\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix} \\
&\iff P=d(1+3X+3X^2+X^3) \\
&\iff P\in vect(1+3X+3X^2+X^3)
\end{aligned}$$

Conclusion : $H=vect(1+3X+3X^2+X^3)$ est la droite dirigée par $(1+3X+3X^2+X^3)$

Remarque : $1+3X+3X^2+X^3=(1+X)^3$.

2. On a

$$\begin{aligned}
P\in G &\iff P\in\mathbb{R}_4[X] \ \ et \ \ P(1)=0etP(2)=0 \\
&\iff P=a+bX+cX^2+dX^3+eX^4 \ \ et \ \ P(1)=0etP(2)=0 \\
&\iff \begin{cases} a+b+c+d+e=0 \\ a+2b+4c+8d+16e=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a+b+c+d+e=0 \\ b+3c+7d+15e=0 \end{cases} \\
&\iff \overrightarrow{Sol}=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}6\\-7\\0\\1\\0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}14\\-15\\0\\0\\1\end{pmatrix} \\
&\iff P=c\underbrace{(2-3X+X^2)}_{A}+d\underbrace{(6-7X+X^3)}_{B}+e\underbrace{(14-15X+X^4)}_{D} \\
&\iff P\in vect(A,B,C)
\end{aligned}$$

Conclusion : G est le ssev dirigé par (A,B,C). La famille est libre (car les degré sont 2 à 2 $\neq 0$)
Ainsi (A,B,C) est une base de G et $\dim(G)=card(Base)=3$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

1. Soit $M=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$AM=\begin{pmatrix} 3a+b & 3c+d\\ -7a+b & -7c+d\end{pmatrix} \quad et \quad MA=\begin{pmatrix} 3a-7b & a+b\\ 3c-7b & c+d\end{pmatrix}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
M\in H &\iff AM=MA \\
&\iff \begin{pmatrix} 3a+b & 3c+d\\ -7a+b & -7c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a-7b & a+b\\ 3c-7b & c+d\end{pmatrix} \\
&\iff \textit{On écrit le système et on résout et on conclut quec } \dim(H)=2
\end{aligned}$$

3. On utilise : libre et dimension=cardinal.

$$\left.\begin{array}{c} (I_2, A) \textit{ est une famille libre de } H \quad \textit{car } \neq 0 \textit{ et non//} \\ \\ cardinal = 2 \\ \\ \dim(H) = 2 < \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow (I_2, A) \textit{ est une base de } H$$

4. On a $A^2.A = A^3 = A.A^2$, donc A^2 commute avec A, ainsi $A^2 \in H$.
   On a maintenant

$$\left.\begin{array}{c} (I_2, A) \textit{ est une base de } H \\ \\ A^2 \in H \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \textit{il existe a,b tel que} \\ A^2 = a\, I_2 + b\, A \end{array}$$

   On fait de même avec A^{-1}

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

1. *La famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$ n'est pas une famille de vecteur colonne, ni une famille de polynôme*

   C'est une famille de fonction donc on va suivre la définition.

   On suppose que : $a_0\, f_0 + a_1\, f_1 + a_2\, f_2 + \cdots + a_n\, f_n = 0$

   ainsi on a que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \underbrace{a_0 + a_1\, e^x + a_2\, e^{2x} + \cdots + a_n\, e^{nx}}_{Gauche} = \underbrace{0}_{Droite}$

   $$\boxed{\text{On va montrer que } a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0}$$

   Voici 2 façons de conclure.

   > Avec les ordres de grandeur quand $x \to \infty$.
   Quand $x \to \infty$ le plus "gros" à gauche, c'est : $a_n\, e^{nx}$,
   donc forcément $a_n = 0$.
   On poursuit en regardant à nouveau le plus gros. Fini

   > Avec les polynômes.
   On remarque que : $a_0 + a_1\, e^x + a_2\, e^{2x} + \cdots + a_n\, e^{nx} = P(\square)$
   avec $\square = e^x$ et $P(\square) = a_0 + a_1\,\square + a_2\,\square^2 + \cdots + a_n\,\square^2$
   On utilise maintenant le théorème fondamental des polynômes

   $$\left.\begin{array}{c} P(\square) = 0 \\ \\ \textit{Quand } x \textit{ varie dans } \mathbb{R}, \\ \textit{alors } \square = e^x \textit{ prend toutes les valeurs dans } \mathbb{R}_+^* \\ \textit{Donc une infinité de valeurs} \end{array}\right\} \Longrightarrow P(X) = 0$$

   Comme le polynôme P est nul, tous ses coefficients sont nuls donc $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ Fini.

2. *La famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ n'est pas une famille de vecteur colonne, mais c'est une famille de polynôme*

   Donc pour montrer libre, on va essayer avec les degrés.

   > On essaye avec l'étude des degrés. On a facilement $\forall\, i \in \{0, 1, ..., n\},\ \deg(P_i) = n$.
   Donc les degrés ne permettent pas de conclure.

   > On essaye avec la def de libre. On suppose que : $a_0\, P_0 + a_1\, P_1 + a_2\, P_2 + \cdots + a_n\, P_n = 0$
   ainsi on a que : $\underbrace{a_0\, X^0 (X-1)^n + a_1\, X^1 (X-1)^{n-1} \cdots + a_n\, X^n (X-1)^0}_{Gauche} = \underbrace{0}_{Droite}$

   $$\boxed{\text{On va montrer que } a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0}$$

   On va utiliser l'ordres de grandeur quand $x \to 0$.

   Quand $x \to 0$ l'ordre de grandeur de $P_i(x)$ c'est x^i donc le plus gros c'est P_0, puis le suivant c'est P_1, puis P_2, ... etc.
   Quand $x \to 0$ le plus "gros" à gauche, c'est : $a_0\, x^0$,
   donc forcément $a_0 = 0$.
   On poursuit en regardant à nouveau le plus gros. Fini

3. *La famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$ n'est pas une famille de vecteur colonne, ni une famille de polynôme*

   C'est une famille de fonction donc on va suivre la définition.

   On suppose que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a_0 + a_1\, \sin(x) + a_2\, \sin(2x) + \cdots + a_n\, \sin(nx) = 0$

   $$\boxed{\text{On va montrer que } a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0}$$

   On peut conclure avec les ordres de grandeur quand $x \to \infty$ ou bien avec les polynômes.

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)
On commence par déterminer une famille génératrice de H qui on l'espère sera une base

$$\overrightarrow{u}=(x_1,\cdots,x_n)\in H \iff x_1+2x_2+\cdots+n\,x_n=0$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = x_2\underbrace{\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{C_2}} + x_3\underbrace{\begin{pmatrix} \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{C_3}} + \cdots + x_n\underbrace{\begin{pmatrix} \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{C_n}}$$

Comme les scalaires sont indépendants, on a $H=vect(\overrightarrow{C_2},\cdots,\overrightarrow{C_n}$.
De plus la famille $(\overrightarrow{C_2},\cdots,\overrightarrow{C_n}$ est en escalier donc libre

Conclusion : $(\overrightarrow{C_2},\cdots,\overrightarrow{C_n}$ est libre et génératrice de H
donc c'est une base et $\dim(H)=cardinal(Base)=n-1$.

Solution de l'exercice 11 (Énoncé)

1. On sait que les matrices $E_{i,j}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Ainsi } \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = cardinal(Base) = n^2.$$

2. La famille $\left(I_n, A, A^2, ..., A^{n^2}\right)$ est de cardinal n^2+1.

   De plus on sait que $card(Libre) \leqslant card(Base) = n^2$

$$\text{Conclusion : La famille } \left(I_n, A, A^2, ..., A^{n^2}\right) \text{ est forcément liée ! ! !}$$

   Ainsi il existe une CL nulle, CàD il existe un polynôme qui annule la matrice.

Solution de l'exercice 12 (Énoncé) C'est une généralisation des polynômes de l'exo 4

1. On a
$$L_0 = \cancel{(X-0)}(X-1)\cdots(X-n) \text{ et } L_1 = (X-0)\cancel{(X-1)}(X-2)\cdots(X-n).$$
2. Il est clair que : $\forall\, i \in \{0,1,2,...,n\},\ deg(L_i) = n$.
$$\text{De plus } k \in \{0,1,2,...,n\},\ L_i(k) = \begin{cases} = 0 \ si\ k \neq i \\ \neq 0 \ si\ k = i \end{cases}.$$
3. On utilise Libre + cardinal=dimension

   Libre ?

   Soit l'équation vectorielle $a_0 L_0 + a_1 L_1 + a_2 L_2 + ... + a_n L_n = 0$

   $\boxed{\text{On va montrer que } a_0 = a_0 = \cdots = a_n = 0}$

   On applique l'égalité en $x = k$ ainsi $0+0+...+a_k L_k(k)+..+0 = 0$

   comme $L_k(k) \neq 0$, on a $ak = 0$.

   Conclusion : La famille $\mathscr{B} = (L_0, L_1, L_2, ..., L_n)$ est libre de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $cardinal = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Tout d'abord on justifie que la CL existe.
$$\left.\begin{array}{r} \mathscr{B} = (L_0, L_1, L_2, ..., L_n) \textit{ est une base de } \mathbb{R}_n[X] \\ \\ 1 \in \mathbb{R}_2[X] \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \textit{il existe a,b,c tel que} \\ \quad a_0 L_0(X) + a_1 L_1(X) + \cdots + a_n L_n(X) = 1 \end{array}$$

   Puis on calcule les scalaires.

   J'applique l'égalité en $x = k$, ainsi $0+0+..+a_k L_k(k)+...+0 = 1$

   donc $a_k = \dfrac{1}{L_k(k)}$
$$\text{Conclusion : } 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(X)}{L_k(k)}.$$

   Généralisation : En suivant la même démarche, on a
$$\text{Si } P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} P(k)\, \frac{L_k(X)}{L_k(k)}.$$

   Remarque : $L_k(k) = (k-0)(k-1)\cdots(1)\cancel{(k-k)}(-1)(-2)\cdots(-(n-k))$, donc
$$L_k(k) = (-1)^{n-1}\, k!\,(n-k)!$$

Solution de l'exercice 13 (Énoncé)

1. On sait que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$?
2. Soit P un polynôme de degré n.

   Il est clair que : $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ deg(P(X+k)) = deg(P)$

   C'est tellement évident que c'est faux en fait faux quand $n=0$, par contre $deg(P(X+k)) \leqslant deg(P)$ est toujours juste.
3. La famille $[P(X), P(X+1), P(X+2), \cdots, P(X+n), P(X+n+1)]$ est de cardinal $n+2$.

   De plus on sait que $card(Libre) \leqslant card(Base) = n+1$

   Conclusion : La famille $(P(X), P(X+1), P(X+2), \cdots, P(X+n), P(X+n+1))$ est forcément liée ! ! !

   Kulture : On peut même démontrer que $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} P(X+K) = 0$.