TD 15 Degré-Matrice.

Mercredi 14 Janvier 2026.

Exercice 1. [Correction] On considère $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de la forme .

$$\begin{pmatrix} a+2b & a & a \\ a & b & b \\ a & b & b \end{pmatrix} \qquad \textit{avec a,b des parametre qcq dans } \mathbb{R}$$

1. Montrer que : $M \in \mathcal{E} \iff M =$ Combinaison linéaire sur des matrices fixes.
2. En utilisant la combinaison linéaire précédente,
   montrer que $\mathcal{M}$ est stable par produit.

Des Récurrences faire celles qui vous semblent utile

Exercice 2. On considère la suite (F_n) définie par :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

En déduire que : $(F_{n+1})^2 - F_n\, F_{n+2} = (-1)^n$ Rappel : $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$

Exercice 3. [Correction] Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Calculer (et simplifier) M_θ^2, $(M_\theta)^{-1}$ et même $(M_\theta)^n$.

Exercice 4. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq b$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N},\ \ A^p = \begin{pmatrix} a^p & c\,\frac{a^p - b^p}{a-b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$

Calcul de A^n via les matrices semblable

Exercice 5. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5\,u_{n+1} - 6\,u_n$$

On considère $\overrightarrow{X_n} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice A tel que $\overrightarrow{X_{n+1}} = A\overrightarrow{X_n}$.
   En déduire $\overrightarrow{X_n}$ en fonction de A et de $\overrightarrow{X_0}$
2. On va calculer A^n.
   On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer la matrice $D = P^{-1}\, A\, P$.
   (c) En déduire une expression de A^n en fonction P et D^n.
   Calculer A^n.
3. Calculer u_n en fonction de n.

Une équation matricielle

Exercice 6. [Correction] Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

L'objectif est de déterminer les matrices X vérifiant : $X^2 = A$

1. Déterminer les matrices $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tel que $AM = MA$.
2. Analyse. On suppose que X est une matrice tel que $X^2 = A$
   $>$ Vérifier que : $AX = XA$.
   $>$ En déduire que X est de la forme $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$
3. Synthèse.
   Parmi les matrices X de la $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, trouver celles qui vérifie $X^2 = A$.

Un peu de théorie

Exercice 7. Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices $n \times n$

1. Soit $C = A.B = (c_{ij})$. On a donc

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = C \end{array}$$

   Pour $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, calculer c_{ij}

2. Soit $D = A^T A = (d_{ij})$.
   Calculer d_{11} puis d_{ii} et enfin $tr\left(A^T A\right)$

3. Soit $\overrightarrow{E_i}$ le vecteur colonne $(0, .., 0, 1, 0, ...0)$. *J'ai écrit le vecteur colonne sous forme de liste (gain de place)*
   Déterminer $E_{ij} = \left(\overrightarrow{E_i}\right) . \left(\overrightarrow{E_j}\right)^T$ et calculer $E_{ij}.E_{k\ell}$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On a

$$M \in \mathcal{E} \iff \textit{il existe a,b tel que } M = \begin{pmatrix} a+2b & a & a \\ a & b & b \\ a & b & b \end{pmatrix}$$

$$\iff M = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2} = a\, M_1 + b\, M_2$$

2. On suppose que $M, M' \in \mathcal{E}$

$$\boxed{\text{On va montrer que } M.M' \in \mathcal{E}}$$

On a

$$\begin{aligned} M.M' &= (a\, M_1 + b\, M_2)(a'\, M_1 + b'\, M_2) \\ &= aa'\, (M_1)^2 + ab'\, M_1 M_2 + a'b\, M_2 M_1 + bb'\, (M_2)^2 \end{aligned}$$

On calcule les produits : $(M_1)^2,\ M_1 M_2,\ M_2 M_1,\ (M_2)^2$

Et finalement on obtient : $M.M' = [\cdots]\, M_1 + [\cdots]\, M_2 \in \mathcal{E}$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Calculer (et simplifier) M_θ^2, $(M_\theta)^{-1}$ et même $(M_\theta)^n$. On a

$$M_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} = M_{2\theta}$$

$$(M_\theta)^{-1} = \frac{1}{det} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On devine que $(M_\theta)^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} = M_{n\theta}$

On le démontre "facilement" par récurrence

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. On a

$$\overrightarrow{X_{n+1}} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,u_{n+1} - 6\,u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

   Ainsi à la mode géo, on a $\overrightarrow{X_n} = A^n\,\overrightarrow{X_0}$

2. On va calculer A^n.

   On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Comme $det(P) = 2 - 3 = -1 \neq 0$ donc P est inversible et calculer

$$P^{-1} = \frac{1}{det(P)} \begin{pmatrix} Donble \\ Symétrie \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (b) On trouve

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (c) Comme $D = P^{-1}\,A\,P$, on a $A = P\,D^{\,-1}$ et $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

   (d) Comme $D^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} A^n = P\,D^n\,P^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\,2^n + 3\,3^n & 6\,2^n - 6\,3^n \\ -2^n + 3^n & 3\,2^n - 2\,3^n \end{pmatrix} \\ &= 2^n \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{X_n} = A^n\,\overrightarrow{X_0} = \begin{pmatrix} -2\,2^n + 3\,3^n & 6\,2^n - 6\,3^n \\ -2^n + 3^n & 3\,2^n - 2\,3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. Déterminer les matrices $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tel que $AM = MA$.

2. Analyse. On suppose que X est une matrice tel que $X^2 = A$
   Vérifier que : $AX = XA$.

   On a $A.X = X^2.X = X.X.X = X.A$

   En déduire que X est de la forme $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

   Comme $AX = XA$, on a sait d'après Q1 que X est de la forme $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3. Synthèse : Parmi les matrices X de la $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, trouver celles qui vérifie $X^2 = A$.

   On suppose $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, ainsi on a

$$
\begin{aligned}
X^2 = A &\iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & \alpha^2+\beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = 2 \\ 2\alpha\beta = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha^2 + \left(\dfrac{1}{2\alpha}\right)^2 = 2 \\ \beta = \dfrac{1}{2\alpha} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 4\alpha^4 - 8\alpha^2 + 1 = 0 \\ \beta = \dfrac{1}{2\alpha} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 4U^2 - 8U + 1 = 0 \\ U = \alpha^2 \\ \beta = \dfrac{1}{2\alpha} \end{cases}
\end{aligned}
$$

   On a $4U^2 - 8U + 1 = 0 \iff U_1 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} > 0$ ou $U_2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} > 0$

   ainsi il y a 4 solutions : $\alpha_1 = +\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$, $\alpha_2 = -\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$, $\alpha_3 = +\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$, $\alpha_4 = -\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$

   Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, on note $\beta_i = \dfrac{1}{2\alpha_i}$

   Conclusion : L'équation $X^2 = A$ admet 4 solutions $X_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$ avec $i \in \{1,2,3,4\}$

   Kulture : Parmi les 4 solutions la seule qui, en plus, vérifie $\det(X) > 0$ et $tr(X) > 0$, c'est X_1
   On la note $\sqrt{A}$