TD 14 Polynôme.

Mercredi 07 Janvier 2026.

Dérivée n-ième

Exercice 1. Pour $k \in \{0, 1, ..., n\}$, calculer la dérivée k-ième de

$$X^n, \quad e^{2x}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad \text{Bonus } \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Application : En utilisant la formule de Leibniz et les calculs ci dessus, calculer $\left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}\right]^{(n)}$

Exercice 2.

1. Soit $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Calculer $[(X+1)^n]^{(k)}$ et $[(X-1)^n]^{(n-k)}$
2. On remarque $(X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$. Montrer que :

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k}(X-1)^k.$$

Exercice 3. [Correction] On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = e^{x^2}$

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall_, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x).e^{x^2}$ et exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction en de $P_n(X)$.
3. Déterminer le degré de $P_n = P_n(X)$
4. Parité.
   (a) Démontrer, par récurrence, que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P_n(-X) = (-1)^n\ P_n(X)$.
   (b) Autre démonstration.
   La fonction f est la fonction définie au début de l'exercice.
   $>$ Calculer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
   $>$ On dérive n fois cette égalité.
   $>$ Conclure.
5. Une relation de récurrence d'ordre 2.
   (a) Écrire une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par la fonction f éviter les fractions.
   (b) On dérive n fois cette égalité Calculer$[\ xf(x)\ ]^{(n)}$ avec Leibniz.
   (c) En déduire une relation entre P_{n+2}, P_{n+1} et P_n.

Exercice 4. [Correction] Soit l'intervalle $I = \left]-\pi/2\,, \pi/2\right[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I,\ f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\alpha_n = f^{(n)}(0)$.

1. On vérifie que : $\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1$.
2. En utilisant Leibniz, vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_k\alpha_{n-k}$.

Exercice 5. [Correction] On veut résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation différentielle : $(x^2-1)\,y'' + 2x\,y' - 6y = 0$

On suppose que P est un polynôme $\neq \mathcal{O}$ et solution de l'équation différentielle

1. Justifier que : $\deg(P) = 2$
2. Déterminer les polynômes qui vérifient E.

—— Partie I d'un concours de 1999 ——

Exercice 6. [Correction] Par abus de langage, dans tout le problème on confond polynôme et fonction polynôme. On appelle f la fonction de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0)=0 \text{ et } \forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=e^{-1/x}$$

Quelques propriétés de la fonction f

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{2n}}e^{-\frac{1}{x}}$$

   et montrer que : (1) : $P_{n+1}(X)=(1-2nX)P_n(X)+X^2P_n'(X)$

2. Donner la valeur de $P_n(0)$ et déterminer le degré de P_n
3. Vérifier que f est solution, sur l'intervalle $[0,+\infty[$, de l'équation différentielle : $x^2y'-y=0$

   Puis, en utilisant la formule de Leibnitz, montrer que :

$$(2) : P_{n+1}(X)+(2nX-1)P_n(X)+n(n-1)X^2P_{n-1}(X)=0$$

4. Déduire des relations (1) et (2) les relations :

   (3) : $P_n(x)=1-n(n-1)\displaystyle\int_0^x P_{n-1}(t)dt$

   (4) : $n(n-1)\mathrm{P}_n(x)-[(2n-2)x-1]\mathrm{P}_n'(x)+x^2\mathrm{P}_n''(x)=0$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

   On a : $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left[e^{x^2}\right] = 2x\, e^{x^2}$

   ET

   $$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[2x\, e^{x^2}\right] = 2\left(1e^{x^2} + x(2x)e^{x^2}\right) = \left(4x^2+2\right)e^{x^2}$$

2. On va démontrer par récurrence

   $H\langle n\rangle$: | il existe un polynôme P_n tel que $\forall, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x).e^{x^2}$

   Initialisation avec $n = 0$

   Comme $\forall x,\ f^{(0)}(x) = f(x) = e^{x^2}$, $P_0 = 1$ convient.

   Ainsi $H_{<0>}$ est vraie

   Hérédité On suppose $H\langle n\rangle$.

   $\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}}$

   On a $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{d}{dx}\left[f^{(n)}(x)\right]'$

   $\left[P_n(x).e^{x^2}\right]'$

   $= \left[P_n(x)\right]'.e^{x^2} + P_n(x).\left[e^{x^2}\right]' = ... = \left[P_n'(x) + 2xP_n(x)\right].e^{x^2}.$

   On choisit $P_{n+1} = P_{n+1}(X) = P_n'(X) + 2XP_n(X)$.

   Comme P_n est un polynôme, on a bien P_{n+1} est un polynôme et il convient

   Conclusion : $H_{<n+1>}$ est vraie

3. Déterminer le degré de $P_n = P_n(X)$

   A l'aide de la question $Q1$, on a $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$ et $P_2 = 4X^2+2$

   On fait par récurrence

   $$H\langle n\rangle : P_n(X) = 2^n X^n + ...$$

   Initialisation avec $n = 0$

   Comme $P_0 = 1$, ainsi $H_{<0>}$ est vraie

   Hérédité On suppose $H\langle n\rangle$.

   $\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}}$

   On a $P_{n+1}(X) = P_n'(X) + 2XP_n(X)$

   $= \left[2^n n\, X^{n-1} + ...\right] + 2X\left[2^n X^n + ...\right]$

   $= 2^{n+1}\ X^{n+1} + ...Fini$

   Conclusion : $H_{<n+1>}$ est vraie

   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\deg(P_n) = n$ et son coefficient dominant est 2^n

4. Parité.

   (a) Démontrer, par récurrence, que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P_n(-X) = (-1)^n\ P_n(X)$.

   On fait par récurrence

   $H\langle n\rangle : P_n(-X) = (-1)^n\ P_n(X)$

   Initialisation avec $n = 0$

   Comme $P_0 = 1$, on a $P_0(X) = 1$ et $P_0(-X) = 1$

   ainsi $H_{<0>}$ est vraie

   Hérédité On suppose $H\langle n\rangle$.

   $\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}\text{, CàD } P_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1}\ P_{n+1}(X)}$

   On a $P_{n+1}(-X) = P_n'(-X) + 2(-X)P_n(-X)$

   $>$ $P_n(-X)$ se calcule avec $H_{<n>}$

   $>$ Pour calculer $P_n'(-X)$, on dérive $P_n(-X) = (1)^n P_n(X)$

$$
\begin{aligned}
\text{Ainsi } [P_n(-X)]' &= [(1)^n P_n(X)] \\
&\Longrightarrow \ominus P_n'(-X) = (1)^n P_n'(X) \\
&\Longrightarrow P_n'(-X) = -(1)^n P_n'(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{On a donc } P_{n+1}(-X) &= -(-1)^n P_n'(X) - 2X(-1)^n \, P_n(X) \\
&= (-1)^{n+1} P_n'(X) + 2X(-1)^{n+1} \, P_n(X) \\
&= (-1)^{n+1} \, P_{n+1}(X)
\end{aligned}
$$

Conclusion : $H_{<n+1>}$ est vraie

(b) Autre démonstration.

On a facilement : $\forall x,\ f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x)$

On dérive n fois cette égalité, ainsi $\Big[f(-x)\Big]^{(n)} = \Big[f(x)\Big]^{(n)}$

On a $>$ $[\ f(x)\ ]^{(n)} = f^{(n)}(x)$

$>$ $[\ f(-x)\ ]^{(n)}$ =composée= $(-1)^n f^{(n)}(-x)$

car $f(-x) \rightsquigarrow (-1) f'(-x) \rightsquigarrow (-1)(-1) f''(-x) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow (-1)^n f^{(n)}(-x)$

Conclusion : $(-1)^n f^{(n)}(-x) = f^{(n)}(x)$

$$
\begin{aligned}
\text{Conclusion : } \forall x,\ f^{(n)}(-x) &= (-1)^n f^{(n)}(x) \\
&\Longrightarrow P_n(-x)\, e^{x^2} = (-1)^n P_n(x)\, e^{x^2} \\
&\Longrightarrow P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \qquad Yes
\end{aligned}
$$

5. Une relation de récurrence d'ordre 2.

(a) On a facilement $f'(x) - 2xf'(x) = 0$

(b) On dérive n fois cette égalité, ainsi $\left[f'(x)\right]^{(n)} - 2\,[x\, f(x)]^{(n)} = 0$

$>$ On a $\left[f'(x)\right]^{(n)} = f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)\,.e^{x^2}$

$>$ $[\ xf(x)\ ]^{(n)}$ = ..avec Leibniz.. $= xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$

(c) On remplace $f^{(n)}(x)$ par $P_n(x)\,.e^{x^2}$ et on obtient

$$P_{n+1}(X) = XP_n(X) + nP_{n-1}(X)$$

Conclusion : $P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) + (n+1)\,P_n(X)$ Yes

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. On vérifie que : $\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1$.

   Facile

2. En utilisant Leibniz, vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}$.

   Pour tout $n \in_{\mathbb{N}}$ On dérive n fois l'équation différentielle, ainsi

$$\begin{aligned} \forall\, x \in I,\ \left[2f'(x)\right]^{(n)} &= \left[f(x)^2 + 1\right]^{(n)} \\ &\Longrightarrow\ 2\, f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{k)}(x).f^{(n-k)}(x) + \mathscr{O} \end{aligned}$$

   On applique en $x = 0$, ainsi $2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}$.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Justifier que : $\deg(P) = 2$

Comme P est un polynôme $\neq \mathscr{O}$, on peut écrire $P = \underbrace{a}_{\neq 0} X^\alpha + \cdots$.

De plus P est solution de l'équation différentielle, ainsi $(x^2-1)\,P'' + 2x\,P' - 6P = \mathscr{O}$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
&\left(X^2-1\right)P''(X) + 2XP'(X) - 6P(X) = \mathscr{O} \\
&\iff \left(X^2-1\right)\left[a\alpha(\alpha-1)X^{\alpha-2}\cdots\right] + 2X\left[a\alpha X^{\alpha-1}\cdots\right] - 6\left[aX^\alpha\cdots\right] = \mathscr{O} \\
&\iff X^\alpha\left[a\alpha(\alpha-1) + 2a\alpha - 6a\right] + \cdots = \mathscr{O} \\
&\iff X^\alpha a\left[\alpha^2 + \alpha - 6\right] + \cdots = \mathscr{O}
\end{aligned}$$

Donc $\underbrace{a}_{\neq 0}\left[\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 6\right] = 0$

De plus avec le discriminant, on obtient que : $\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 6 = 0 \iff \alpha = 2$ ou $\alpha = -3$

Or α est un degré donc $\alpha \in \mathbb{N}$

Conclusion : $\deg(P) = 2$

2. Déterminer les polynômes qui vérifient E.

On cherche les solution de la forme $P(X) = aX^2 + bX + c \in H$. On a

$$\begin{aligned}
&\left(X^2-1\right)P''(X) + 2XP'(X) - 6P(X) = \mathscr{O} \\
&\iff \left(X^2-1\right)[2a] + 2X[2aX + b] - 6\left[aX^2 + bX + c\right] = \mathscr{O} \\
&\iff X^2[2a + 4a - 6a] + X[2b - 6b] + [-a - 6c] = \mathscr{O}
\end{aligned}$$

Donc $b = 0$ et $a = -6c$.

Conclusion : Les solutions P polynômiale de (E) sont $P = 6cX^2 - c = c\left(6X^2 - 1\right)$ avec $c \in \mathbb{R}$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. Classique

   $>$ Sur $]0,+\infty[$, la fonction est définie avec des fonctions usuelles et les opérations classiques, ainsi f est $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $]0,+\infty[$

   $>$ On démontrer par récurrence

$$H\langle n\rangle : \left|\begin{array}{c} \text{Il existe un polynôme } P_n \\ \text{tel que } \forall x>0,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)\end{array}\right.$$

   A la fin de l'hérédité, on choisit $P_{n+1}(x)=(1-2nx)P_n(x)+x^2P'(x)$.
   Comme P_n est un polynôme, on a bien P_{n+1} est un polynôme.

2. Donner la valeur de $P_n(0)$

   On applique $P_{n+1}(X)=(1-2nX)P_n(X)+X^2P'(X)$ avec $X=0$,

$$\text{ainsi } P_n(0)=(1-2(n-1)0)P_{n-1}(0)+0^2P'_{n-1}(0)$$
$$=P_{n-1}(0)$$

$$\text{Conclusion : } P_n(0)=P_{n-1}(0)=P_{n-2}(0)=\ldots=P_0(0)=1$$

   Déterminer le degré de P_n

   Pour conjecturer/deviner le résultat, va calculer P_0, P_1, P_2,....

   $P_0=1$
   $P_1=(1-2.0.X)P_0(X)+X^2P_0'(X)=1$
   $P_2=(1-2.1.X)P_1(X)+X^2P_1'(X)=1-2X$
   $P_3=(1-2.2.X)P_2(X)+X^2P_2'(X)=-6X^2+\cdots$

   On fait par récurrence à partir de $n=1$

$$H_{<n>}\ :\ \deg(P_n)=n-1,\ C\text{à}D\ P_n=\underbrace{a}_{\neq 0}X^{n-1}+\cdots$$

   Initialisation avec $n=1$

   Comme $P_1=1$, on a bien $\deg(P_1)=0$

   Hérédité On suppose $H_{<n>}$

   Comme $\deg(P_n)=n-1$, on a $P_{n-1}=\underbrace{a}_{\neq 0}X^{n-1}+\cdots$

$$\begin{aligned}\text{On a } P_{n+1}(X)&=(1-2.n.X)P_n(X)+X^2P_n'(X)\\&=(1-2.n.X)[aX^{n-1}+\cdots]+X^2[a(n-1)X^{n-2}+\cdots]\\&=X^n[-2.na+a(n-1)]+\cdots\\&=X^n\ominus a[n+1]+\cdots\end{aligned}$$

   Comme $a\neq 0$ et $n+1\neq 0$ donc $\deg(P_{n+1})=n$ et $H_{<n+1>}$ est vraie

3. Autour des P_n.

   (a) Facile.

   (b) On dérive n fois l'équation différentielle,... Fini.

4. On a

$$\left.\begin{array}{r}P_{n+1}(x)=(1-2nx)P_n(x)+x^2P_n'(x)\\ P_{n+1}(x)=(1-2nx)P_n(x)+n(n-1)x^2P_{n-1}(x)\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ x^2P_n'(x)=n(n-1)x^2P_{n-1}(x)$$

$$\text{Donc } P_n'(x)=n(n-1)P_{n-1}(X)$$

   On intègre cette égalité sur $[0,x]$ ainsi

$$\int_0^x P_n'(t)\ dt=n(n-1)\int_0^x P_{n-1}(t)\ dt$$

$$\text{Fini car } P_n(0)=1$$

5. On a facilement $P_{n+1}(x) = (1-2nx) P_n(x) + x^2 P'_n(x)$

$$\Longrightarrow P_{n+2}(x) = (1-2(n+1)x) P_{n+1}(x) + x^2 P'_{n+1}(x)$$

On remplace $P_{n+1}(x)$ par son expression en $P_n(x)$

On remplace $P'_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$

$=$ Expression en fonction $P_n(x), P'_n(x), P''_n(x)$

On remplace maintenant $P_{n+2}(x) = (1-2(n+1)x) P_{n+1}(x) + (n+1)(n) x^2 P_n(x)$ Fini OUf 1 ! ! !