## Calculs Classiques

**Exercice 1.**

1. On considère l'ensemble $H$ défini par

$$H = \left\{ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, a, b, c \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{u} = (a-b\,,\, b-c\,,\, c-a) \right\}$$

Montrer que $H$ est un ssev de $\mathbb{R}^3$, déterminer une famille génératrice et même la dimension de $H$.

2. On note $\mathscr{C} = (\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère les ensembles

$$F = vect\,(\ Cosinus\ )\ \text{ et } G = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tel que } f(0) = 0 \right\}$$

   (a) Montrer que $F$ et $G$ sont des sous espaces vectoriel.

   (b) Montrer que $F \cap G = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.

3. On note $\mathscr{C} = (\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère les ensembles

$$\mathcal{P} = \text{l'ensemble des fonctions paires et } \mathcal{I} = \text{l'ensemble des fonctions impaires.}$$

   (a) Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$

   (b) Plus difficile Montrer que : $\forall\, h \in \mathscr{C} = (\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe deux fonctions $f, g$ telles que

$$g = f + g \text{ et } f \in \mathcal{P} \text{ et } g \in \mathcal{I}$$

## Un exercice plus abstrait/formel et donc difficile

**Exercice 2.** [Correction] Soit $n$ un entier. On note $\mathscr{C} = (\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère $H_n$ l'ensemble des solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} y^{(k)} = 0$

1. *Un petit résultat avant de commencer*

   (Re)-Lire la page 2, théorème 2 et 3 du chapitre sur les équations différentielles
   Soit $h$ une fonction. Démontrer que : $h^{(n+1)} = 0 \iff h \in \mathbb{R}_n[X]$

2. Montrer que $H_n$ est ssev de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Montrer que $f \in H_n \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ [f(x)\, e^x]^{(n+1)} = 0$.
4. En déduire que $H = vect\,(f_0, f_1, ..., f_n)$ avec $f_k : x \longmapsto x^k\, e^{-x}$.

## Un exercice "classique"

**Exercice 3.** [Correction] Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

L'objectif est de déterminer les matrices $X$ vérifiant : $X^2 = A$

1. Méthode via le commutant
   On considère $Com(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ tq\ AM = MA\}$
   (a) Montrer que $Com(A)$ est un ssev et déterminer une famille génératrice de $Com(A)$
   (b) Montrer que $Com(A) = vect(I_2, J)$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Et déterminer $\lambda, \mu$ tel que $A = \lambda\, I_2 + \mu\, J$
   (c) Analyse. On suppose que $X$ est une matrice tel que $X^2 = A$
   $>$ Vérifier que : $X \in Com(A)$.
   $>$ En déduire qu'il existe $\alpha, \beta$ tel que $X = \alpha\, I_2 + \beta\, J$
   (d) Synthèse.
   Parmi les matrices $X = \alpha\, I_2 + \beta\, J$, trouver celles qui vérifie $X^2 = A$.

2. Méthode via diagonalisation
   (a) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\overrightarrow{X} = (x; y; z) \neq \overrightarrow{\mathscr{O}}$ tel que $A\overrightarrow{X} = \lambda\, \overrightarrow{X}$
   i. Montrer que la matrice $A - \lambda\, I_3$ n'est pas inversible.
   ii. Calculer et factoriser $\det(A - \lambda\, I_3)$ ; en déduire que $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$
   (b) Résoudre le système $A\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}$.
   Expliciter $\overrightarrow{C_1}$, la solution $\overrightarrow{C_1} = (...; 1)$ CàD celle dont la deuxième coordonnée vaut $1$.
   (c) Résoudre le système $A\overrightarrow{X} = 2\overrightarrow{X}$.
   Expliciter $\overrightarrow{C_2}$, la solution $\overrightarrow{C_3} = (...; 1)$ CàD celle dont la deuxième coordonnée vaut $1$.
   (d) On note $P = \left(\overrightarrow{C_1} | \overrightarrow{C_2}\right)$, la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}$, dans cet ordre.
   Justifier que $P$ est inversible et calculer $D = P^{-1}AP$. *On vient de diagonaliser la matrice $A$*
   `On va maintenant résoudre l'équation` $X^2 = A$.
   (e) On suppose que $X$ est une matrice tel que $X^2 = A$. On considère la matrice $Y = P^{-1}XP$
   i. Justifier que : $X^2 = A \iff Y^2 = D$ et $YD = DY$.
   ii. En écrivant $Y = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et en utilisant $YD = DY$, montrer que $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$
   iii. En déduire qu'il existe 4 matrices $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ vérifiant $Y^2 = D$
   iv. Conclure qu'il existe 4 matrices vérifiant $X^2 = A$ et donner leur expression en fonction de $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ et de $P, P^{-1}$