Exercice 1. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5\,u_{n+1} - 6\,u_n$$

On considère $\overrightarrow{X_n} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice A tel que $\overrightarrow{X_{n+1}} = A\overrightarrow{X_n}$.
   En déduire $\overrightarrow{X_n}$ en fonction de A et de $\overrightarrow{X_0}$
2. On va calculer A^n.
   On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer la matrice $D = P^{-1}\,A\,P$.
   (c) En déduire une expression de A^n en fonction P et D^n.
   Calculer A^n.
3. Calculer u_n en fonction de n, de u_0 et de u_1.
4. On suppose que $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$
   Donner la valeurs de u_n en fonction de n
   Énoncer le petit théorème de Fermat
   En déduire que : Pour tout entier p premier, on a p divise u_p

Exercice 2. Dans tout l'exercice, on note $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{\mathscr{O}}$ tel que $A\overrightarrow{X} = \lambda\,\overrightarrow{X}$
   (a) Montrer que la matrice $A - \lambda\,I_3$ n'est pas inversible.
   (b) *Avec votre calculatrice*, calculer et factoriser $\det(A - \lambda\,I_3)$
   En déduire que $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$
2. Résoudre le système $A\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}$.
   Expliciter $\overrightarrow{C_1}$, la solution $\overrightarrow{C_1} = (..., ..., 1)$ CàD celle dont la dernière coordonnée vaut 1.
3. On considère $\overrightarrow{C_2} = (0, 0, -1)$.
   Vérifier que : $A\overrightarrow{C_2}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{C_1}$ et $\overrightarrow{C_2}$, CàD $A\overrightarrow{C_2} = ...\overrightarrow{C_1} + ...\overrightarrow{C_2}$
4. Résoudre le système $A\overrightarrow{X} = 2\overrightarrow{X}$.
   Expliciter $\overrightarrow{C_3}$, la solution $\overrightarrow{C_3} = (..., ..., 1)$ CàD celle dont la dernière coordonnée vaut 1.
5. On note $P = \left(\overrightarrow{C_1}|\overrightarrow{C_2}|\overrightarrow{C_3}\right)$, la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}, \overrightarrow{C_3}$, dans cet ordre.
   (a) Se persuader que $A.P = A\left(\overrightarrow{C_1}|\overrightarrow{C_2}|\overrightarrow{C_3}\right) = \left(A\overrightarrow{C_1}|A\overrightarrow{C_2}|A\overrightarrow{C_3}\right)$.
   Trouver une matrice triangulaire T telle que $AP = PT$.
   (b) Justifier que P est inversible et *avec votre calculatrice*, calculer P^{-1}
   (c) En écrivant $T = D + N$, calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}$
   (d) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On a

$$\overrightarrow{X_{n+1}} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,u_{n+1} - 6\,u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

   Ainsi à la mode géo, on a $\overrightarrow{X_n} = A^n\,\overrightarrow{X_0}$

2. On va calculer A^n.

   On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Comme $det(P) = 2 - 3 = -1 \neq 0$ donc P est inversible et on a

$$P^{-1} = \frac{1}{det(P)} \begin{pmatrix} Donble \\ Symétrie \end{pmatrix} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (b) On trouve

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (c) Comme $D = P^{-1}\,A\,P$, on a $A = P\,D\,P^{-1}$ et $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

   (d) Comme $D^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} A^n = P\,D^n\,P^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\,2^n + 3\,3^n & 6\,2^n - 6\,3^n \\ -2^n + 3^n & 3\,2^n - 2\,3^n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{X_n} = A^n\,\overrightarrow{X_0} = \begin{pmatrix} -2\,2^n + 3\,3^n & 6\,2^n - 6\,3^n \\ -2^n + 3^n & 3\,2^n - 2\,3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$

   Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2^n + 3^n)\,u_1 + (3\,2^n - 2\,3^n)\,u_0 = 2^n(3u_0 - u_1) + 3^n(u_1 - 2u_0)$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\overrightarrow{X} = (x; y; z) \neq \overrightarrow{\mathscr{O}}$ tel que $A\overrightarrow{X} = \lambda\,\overrightarrow{X}$

   (a) Montrer que la matrice $A - \lambda\,I_3$ n'est pas inversible.

   On fait un RA. On suppose que la matrice $A - \lambda\,I_3$ est inversible

   la matrice $(A - \lambda\,I_3)^{-1}$ existe et le peut l'utiliser

   On sait que $\overrightarrow{X} = (x; y; z) \neq \overrightarrow{\mathscr{O}}$ et que $A\overrightarrow{X} = \lambda\,\overrightarrow{X}$, on a

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{X} = \lambda\,\overrightarrow{X} &\Longrightarrow A\overrightarrow{X} - \lambda\,\overrightarrow{X} = \overrightarrow{\mathscr{O}} \\ &\Longrightarrow (A - \lambda\,I_3)\,\overrightarrow{X} = \overrightarrow{\mathscr{O}} \\ &\Longrightarrow \overrightarrow{X} = (A - \lambda\,I_3)^{-1}\,\overrightarrow{\mathscr{O}} = \overrightarrow{\mathscr{O}}\ OUPS \end{aligned}$$

   Conclusion : la matrice $A - \lambda\,I_3$ n'est pas inversible.

   (b) *Avec votre calculatrice*, calculer et factoriser $\det(A - \lambda\,I_3)$

   On trouve $\det(A - \lambda\,I_3) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$

   En déduire que $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$

   Comme la matrice $A - \lambda\,I_3$ n'est pas inversible donc $\det(A - \lambda\,I_3) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$

   Donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

2. Résoudre le système $A\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}$.

   On a $A\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 3x + y - z = x \\ -x + y + z = y \\ x = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Expliciter $\overrightarrow{C_1}$, la solution $\overrightarrow{C_1} = (...,...,1)$ CàD celle dont la dernière coordonnée vaut 1.

   On a $\overrightarrow{C_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1; -1; 1)$

3. On considère $\overrightarrow{C_2} = (0, 0, -1)$. Vérifier que : $A\overrightarrow{C_2}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{C_1}$ et $\overrightarrow{C_2}$, CàD $A\overrightarrow{C_2} = ...\overrightarrow{C_1} + ...\overrightarrow{C_2}$

   On a

$$A\overrightarrow{C_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overset{1}{..}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \overset{1}{..}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{C_2}$$

4. Résoudre le système $A\overrightarrow{X} = 2\overrightarrow{X}$.

   On a $A\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 3x + y - z = 2x \\ -x + y + z = 2y \\ x = 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ - y - z = 0 \end{cases} \iff \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Expliciter $\overrightarrow{C_3}$, la solution $\overrightarrow{C_3} = (...,...,1)$ CàD celle dont la dernière coordonnée vaut 1.

On a $\overrightarrow{C_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2;-1;1)$

5. On note $P = \left(\overrightarrow{C_1}|\overrightarrow{C_2}|\overrightarrow{C_3}\right)$, la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}, \overrightarrow{C_3}$, dans cet ordre.

   (a) Se persuader que $A.P = A\left(\overrightarrow{C_1}|\overrightarrow{C_2}|\overrightarrow{C_3}\right) = \left(A\overrightarrow{C_1}|A\overrightarrow{C_2}|A\overrightarrow{C_3}\right)$.

   Trouver une matrice triangulaire T telle que $AP = PT$.

   On a

$$\begin{aligned} A.P = A\left(\overrightarrow{C_1}|\overrightarrow{C_2}|\overrightarrow{C_3}\right) &= \left(A\overrightarrow{C_1}|A\overrightarrow{C_2}|A\overrightarrow{C_3}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{C_1}|\overrightarrow{C_1}+\overrightarrow{C_2}|2\overrightarrow{C_3}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Conclusion : $A.P = P.T$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) Justifier que P est inversible et *avec votre calculatrice*, calculer P^{-1}

   On a $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   donc $\det(P) = ... = 2$ et $P^{-1} = ...$

   (c) En écrivant $T = D + N$, calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}$

   On a $T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N}$

   On vérifie facilement que $N^2 = \mathcal{O}$ et $D.N = N.D$

   Ainsi avec le binôme, on a $T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [N]^k.[D]^{n-k}$ *car* $D.N = N.D$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{1.N^0.D^n}_{k=0} + \underbrace{n.N^1.D_{n-1}}_{k=1} + \mathcal{O} + ... + \mathcal{O} \\ &= \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   (d) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

   on a $A.P = P.T \iff A = P.T.P^{-1}$

   Ainsi $A^n = \left(P.T.P^{-1}\right)\left(P.T.P^{-1}\right)...\left(P.T.P^{-1}\right) = P.T^n.P^{-1}$