TD 16 Ssev.

Mercredi 21 Janvier 2026.

Vect(...) mon ami

Exercice 1. [Correction] On considère l'ensemble H des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ b+c & a+b \end{pmatrix}$

1. Montrer que H est un ssev et déterminer une famille génératrice de H.
2. Soit les matrices $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $H = vect(I_2, A)$.
3. Justifier que $\dim(H) = 2$.

Exercice 2. [Correction] On se place dans $\mathbb{R}_4[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynôme de degré $\leqslant 4$
On considère l'ensemble

$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}_4[X] \text{ tel que } X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X) \right\}$$

1. Vérifier que : Si $P \in \mathbb{R}_4[X]$ alors $X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) \in \mathbb{R}_4[X]$.
2. Montrer que H est un ssev de $\mathbb{R}_4[X]$.
3. Déterminer une famille génératrice de H.

Exercice 3. [Correction] On considère les complexes $r = 2 + 3i$ et $r' = \overline{r} = 2 - 3i$

1. On considère les fonctions

$$f_1 : t \longmapsto e^{rt},\ f_2 : t \longmapsto e^{r't},\ g_1 : t \longmapsto \cos(3t)e^{2t} \text{ et } g_2 : t \longmapsto \sin(3t)e^{2t}$$

   et les ssev $F = vect\left(f_1, f_2\right)$ et $G = vect\left(g_1, g_2\right)$

   En utilisant $\subset$ et $\supset$ et l'optimalité du vect, montrer que $F = G$.

2. On considère H l'ensemble des solutions de l'EDL_2 : $y'' - 4y' + 13y = \mathscr{O}$

   Écrire et résoudre l'équation caractéristique.

   En déduire que : $H = vect\left(f_1, f_2\right)$

   Donner les solutions de l'EDL_2

Libre-Liée

Exercice 4. [Correction] Soit $H = Vect\left(X^0, id, \cos\right)$.

Montrer que la famille $\left(X^0, id, \cos\right)$ est libre. Déterminer $\dim H$.

Exercice 5. [Correction] Discuter selon les paramètres $u, v \in \mathbb{R}$, si la famille

$$\overrightarrow{a} = (u, 2, 0),\ \overrightarrow{b} = (v, 0, -1),\ \overrightarrow{c} = (0, 2u, v)$$

est libre ou liée et quand elle est liée, expliciter une CL nulle et, dans les différentes situations, déterminer $\dim\left[vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\right]$.

Exercice 6. On considère les polynômes

$$P_i = X^i(X-1)^{n-i} \quad \textit{avec } i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$$

1. En utilisant un argument d'ordre de grandeur quand $x \to 0$, montrer que la famille $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, ..., P_n)$ est libre.
2. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 7. [Correction] On admet le résultat suivant

$$\left.\begin{array}{r} P \text{ est un polynôme} \\ \\ \forall \square,\ P(\square) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{Alors par rigidité, } P = P(X) = \mathscr{O} \\ \textit{CàD tous les coef de } P \textit{ sont nuls.} \end{array}$$

En utilisant cet argument, montrer que les familles suivantes sont libres

> $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = \cos^k(x)$ *avec* $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

> $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = e^{kx}$ *avec* $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Montrer que H est un ssev et déterminer une famille génératrice de H."Classique"

$$\text{on a : } M \in H \iff M = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ b+c & a+b \end{pmatrix}$$
$$\iff M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff P \in vect(I_2, A, B)$$

Conclusion : $H = vect(I_2, A, B)$ est un ssev et (I_2, A, B) dirige H et $\dim(H) \leqslant 3$

2. Montrer que $H = vect(I_2, A)$.

On fait $\subset$ et $\supset$

$\subset$?

Comme $H = vect(I_2, A, B)$, on va utiliser l'optimalité

On a

$$\left.\begin{array}{c} vect(I_2, A) \textit{ est un ssev} \\ I_2, A \in \, vect(I, A) \\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)\, I + (1)A \in \, vect(I, A) \end{array}\right\} \Longrightarrow H = vect(I_2, A, B) \subset vect(I_2, A)$$

$\supset$

Comme $vect(I_2, A)$ est vect, on va utiliser l'optimalité

On a

$$\left.\begin{array}{c} H \textit{ est un ssev} \\ I_2, A \in \, vect(I, A, B) \end{array}\right\} \Longrightarrow vect(I_2, A) \subset H = vect(I_2, A, B)$$

Conclusion : $H = vect(I_2, A, B) = vect(I_2, A)$

La famille (I_2, A) est génératrice de H et libre car $\neq \overrightarrow{O}$ et non//

Conclusion : La famille (I_2, B) est une base de H et $\dim(H) = 2$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Vérifier que : Si $P \in \mathbb{R}_4[X]$ alors $X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right) \in \mathbb{R}_4[X]$.

   On suppose que $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on peut écrire $P = a\,X^4 + b\,X^3 + c\,X^2 + d\,X^1 + e\,X^0$

   On a $X^4.P\left(\dfrac{1}{X}\right)1 = X^4\left[a\,\dfrac{1}{X^4} + b\,\dfrac{1}{X^3} + c\,\dfrac{1}{X^2} + d\,\dfrac{1}{X} + e\,X^0\right]$
   $= a\,X^0 + b\,X^1 + c\,X^2 + d\,X^3 + e\,X^4$

   Conclusion : $X^4.P\left(\dfrac{1}{X}\right) \in \mathbb{R}_4[X]$

2. Montrer que H est un ssev de $\mathbb{R}_4[X]$.

   On fait $\overrightarrow{0}$ et CL

   $\overrightarrow{0}$?

   Ici $\overrightarrow{0}$, c'est $\mathscr{O}$ le polynôme nul

   On a bien $\mathscr{O} \in \mathbb{R}_4[X]$ et $X^4.\mathscr{O}\left(\dfrac{1}{X}\right) = X^4.\mathscr{O} = \mathscr{O}$

   donc $\mathscr{O} \in H$

   CL ?

   Pour tout $P, Q \in H$, et tout λ, μ, on a

   $(\lambda\,P + \mu\,Q)$ est bien un polynôme de degré $\leqslant 4$ car P,Q le sont

   Et $X^4.\,(\lambda\,P + \mu\,Q)\left(\dfrac{1}{X}\right) = \lambda\,X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right) + \mu\,X^4 Q\left(\dfrac{1}{X}\right)$

   Or $P, Q \in H$ *donc* $X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right) = P(X)$ *et* $X^4 Q\left(\dfrac{1}{X}\right) = Q(X)$

   $= \lambda\,P(X) + \mu\,Q(X)$

   Donc $(\lambda\,P + \mu\,Q) \in H$

   Conclusion : H est bien un ssev.

3. Déterminer une famille génératrice de H.

   On a

$$
\begin{aligned}
P \in H \iff & \left|\begin{array}{l} P = a\,X^4 + b\,X^3 + c\,X^2 + d\,X^1 + e\,X^0 \\ Et\ X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right) = P(X) \end{array}\right. \\
\iff & a\,X^4 + b\,X^3 + c\,X^2 + d\,X^1 + e\,X^0 = a\,X^0 + b\,X^1 + c\,X^2 + d\,X^3 + e\,X^4 \\
\iff & \begin{cases} a \quad\quad - e = 0 \\ \quad b - d \quad = 0 \\ \quad -b + d \quad = 0 \\ -a \quad\quad + e = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a \quad - e = 0 \\ \quad b - d \quad = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow X^4 \\ \leftarrow X^3 \\ \leftarrow X^2 \\ \leftarrow X^1 \\ \leftarrow X^0 \end{array} \\
\iff & P = c\,\underbrace{X^2}_{A(X)} + d\,\underbrace{\left(X^3 + X^1\right)}_{B(X)} + e\,\underbrace{\left(X^4 + X^0\right)}_{C(X)}
\end{aligned}
$$

   Conclusion : $H = vect(A, B, C)$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. On considère les fonctions

$$f_1 : t \longmapsto e^{rt},\ f_2 : t \longmapsto e^{r't},\ g_1 : t \longmapsto \cos(3t)e^{2t} \text{ et } g_2 : t \longmapsto \sin(3t)e^{2t}$$

   et les ssev $F = vect\left(f_1, f_2\right)$ et $G = vect\left(g_1, g_2\right)$

   En utilisant $\subset$ et $\supset$ et l'optimalité du vect,

2. montrer que $F = G$.

   On fait $\subset$ et $\supset$

   $\subset$?

   On a

$$\left.\begin{array}{l} G = vect(\cdots) \textit{ est un ssev} \\ \forall\, x,\ f_1(x) = e^{(2+3i)x} = e^{2x}e^{i3x} = e^{2x}\left[\cos(3x) + i\sin(3x)\right] \\ \quad \text{donc } f_1 = g_1 + i\, g_2 \\ \text{De même } f_2 = g_1 - i\, g_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow F = vect(f_1, f_2) \subset G$$

   $\supset$

   On a

$$\left.\begin{array}{l} F = vect(\cdots) \textit{ est un ssev} \\ \forall\, x,\ g_1(x) = \cos(3x)e^{2x} = \text{Re}\left(e^{rx}\right) = \dfrac{e^{rx} + e^{r'x}}{2} \\ \quad \text{donc } g_1 = \dfrac{1}{2} f_1 + \dfrac{1}{2} f_2 \\ \text{De même } g_2 = \dfrac{1}{2i} f_1 - \dfrac{1}{2i} f_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow G = vect(g_1, g_2) \subset F$$

   Conclusion : $F = G$

3. On considère H l'ensemble des solutions de l'EDL_2 : $y'' - 4\,y' + 13\,y = \mathscr{O}$

   Écrire et résoudre l'équation caractéristique.

   Les solution de l'équation caractéristique sont $r = 2 + 3i$ et $r' = \overline{r} = 2 - 3i$

   En déduire que : $H = vect\left(f_1, f_2\right)$

   Comme $r \neq r'$, on sait que les solutions de l'EDL2 sont : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda\, e^{rx} + \mu\, e^{r'x}$

   Conclusion : l'ensemble des solutions de l'EDL2 c'est $vect\,(f_1, f_2)$, CàD les fonctions de la formes $\lambda\, e^{rx} + \mu\, e^{r'x}$

   Donner les solutions de l'EDL_2

   Comme $vect\,(f_1, f_2) = vect\,(g_1, g_2)$, on a

   L'ensemble des solutions de l'EDL2 c'est $vect\,(g_1, g_2)$, CàD les fonctions de la formes $A\,\cos(3t)e^{2t} + B\,\sin(3t)e^{2t}$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

On fait niveau 0.

Je suppose que : $a[1] + b\,id + c\cos = \mathscr{O}$

CàD $\forall x \in \mathbb{R},\ a + bx + c\cos(x) = 0$

$$\boxed{\text{On va montrer : } a = b = c = 0}$$

Je dérive deux fois, ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ c\cos(x) = 0$

Ainsi avec $x = 0$, on a $c = 0$.

Ainsi on a $\forall x \in \mathbb{N},\ a + bx = 0$.

J'applique avec $x = 0$ et $x = 1$, ainsi $a = b = 0$ Fini.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. On a $det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = ... = 2\,u^2 - 2\,v^2$

   $>$ Lorsque $det(...) = 0 \iff u = v \text{ ou } u = -v$, la famille est liée.
   $>$ Lorsque $det(...) \neq 0 \iff u \neq v \text{ et } u \neq -v$, la famille est libre.

2. On note $H = vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

   $>$ Lorsque $det(...) \neq 0 \iff u \neq v \text{ et } u \neq -v$.

   La famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est libre et génératrice de H donc c'est une base de H

   Ainsi $\dim(H) = cardinal(Base) = 3$.

   $>$ Lorsque $u = v \implies det(...) = 0$, la famille est liée.

   Comme $H = vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, ainsi on a $\dim(H) \leqslant 3$

   On a

   $$(-u)\begin{pmatrix} u \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} u \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2u \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   $$\implies \overrightarrow{c} = u\,\overrightarrow{a} - u\,\overrightarrow{b}$$

   Ainsi on a $H = vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$

   La famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ est génératrice de H et libre (car non//)

   Donc c'est une base de H et $\dim(H) = 2$.

   $>$ Lorsque $u = -v \implies det(...) = 0$, la famille est liée.

   On fait pareil et on trouve $\dim(H) = 2$.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. On suppose que : $a_0\, f_0 + a_1\, f_1 + a_2\, f_2 + \cdots + a_n\, f_n = 0$
   ainsi on a que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a_0 + a_1\, \cos(x) + a_2\, \cos^2(x) + \cdots + a_n\, \cos^n(x) = O$

   $$\boxed{\text{On va montrer que } a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0}$$

   On remarque que : $a_0 + a_1\, e^x + a_2\, e^{2x} + \cdots + a_n\, e^{nx} = P(\square)$
   avec $\square = \cos(x)$ et $P(X) = a_0 + a_1\, X + a_2\, X^2 + \cdots + a_n\, X^2$

   On utilise maintenant le théorème fondamental de rigidité des polynômes

   $$\forall \square,\ P(\square) = 0 \implies P(X) = 0$$

   Comme le polynôme P est nul, tous ses coefficients sont nuls donc $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ Fini.

2. On suppose que : $a_0\, f_0 + a_1\, f_1 + a_2\, f_2 + \cdots + a_n\, f_n = 0$
   ainsi on a que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a_0 + a_1\, e^x + a_2\, e^{2x} + \cdots + a_n\, e^{nx} = O$

   $$\boxed{\text{On va montrer que } a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0}$$

   Voici 2 façons de conclure.

   $>$ Avec les ordres de grandeur quand $x \to \infty$.

   Quand $x \to \infty$ le plus "gros" à gauche, c'est : $a_n\, e^{nx}$,
   donc forcément $a_n = 0$.
   On poursuit en regardant à nouveau le plus gros. Fini

   $>$ Avec les polynômes et la rigidité.

   On remarque que : $a_0 + a_1\, e^x + a_2\, e^{2x} + \cdots + a_n\, e^{nx} = P(\square)$
   avec $\square = e^x$ et $P(X) = a_0 + a_1\, X + a_2\, X^2 + \cdots + a_n\, X^2$

   On utilise maintenant le théorème fondamental de rigidité des polynômes

   $$\forall \square,\ P(\square) = 0 \implies P(X) = 0$$

   Comme le polynôme P est nul, tous ses coefficients sont nuls donc $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ Fini.