Morphisme.

1 Morphisme.

1.1 Définition et Shortcut : h_A.

Définition 1. Définition et vocabulaire

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit ϕ une fonction de E à valeurs dans F.

On dit que ϕ est un morphisme ou fonction linéaire ou application linéaire

Ssi la fonction est définie sur E, CàD $\mathscr{D} = E$ et

> ϕ associe les nulles, CàD $\phi(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.

et

> ϕ distribue les CL, CàD

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \lambda, \mu, \quad \phi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\phi(\vec{u}) + \mu\phi(\vec{v}).$$

Notation et Vocabulaire.

> $\mathscr{L}(E,F)$, c'est l'ensemble des applications linéaires de E à valeurs dans F.
les éléments de $\mathscr{L}(E,F)$ sont appelés les *morphismes* de E dans F.

> $\mathscr{L}(E)$, c'est l'ensemble des applications linéaires de E à valeurs dans E.
les éléments de $\mathscr{L}(E)$ sont appelés les *endomorphismes* de E.

> $Isom(E,F)$, c'est l'ensemble des applications linéaires **bijectives** de E sur F.
les éléments de $Isom(E,F)$ sont appelés les *isomorphismes* de E sur F.

> $GL(E)$ ou $Aut(E)$, c'est l'ensemble des endomorphismes **bijectives** de E (sur E).
les éléments de $GL(E)$ ou $Aut(E)$ sont appelés les *automorphismes* de E.

Exemples de fonction linéaire

> La multiplication par un objet fixe est linéaire.

> J'applique en $\square = fixe$ est linéaire.

> La dérivation est linéaire.

> La trace, la transposition sont linéaires.

Théorème 2. Les morphisme de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Soit A une matrice de taille $n \times p$.

La fonction, h_A associée à la matrice A et noté h_A, est la fonction définie par

$$h_A : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \; ; \; \vec{U} \longmapsto A\vec{U}$$

De plus cette fonction est un morphisme de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Réciproquement : Si/lorsque φ est un morphisme de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$
alors il existe une unique matrice A tel que $\varphi = h_A$

1.2 Opérations sur les morphismes.

Théorème 3. Opérations sur les morphismes

> **Une CL de fonctions linéaires est encore linéaire**

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$, CàD des morphismes de E à valeurs dans F et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Alors $\lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E,F)$, CàD

$$\left.\begin{array}{l} f \textit{ est linéaire} \\ g \textit{ est linéaire} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda f + \mu g \textit{ est linéaire}$$

Interprétation : $\left(\mathscr{L}(E,F), +, .\right)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

> Le produit de deux morphismes *n'a pas de sens (en général)* et n'est pas linéaire.

> **Une composée de fonctions linéaires est encore linéaire**

Soit E, F et G trois $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$

Alors la composée $[g \circ f]$ se calcule et $[g \circ f] \in \mathscr{L}(E,G)$,

$$\left.\begin{array}{l} f \textit{ est linéaire} \\ g \textit{ est linéaire} \end{array}\right\} \Longrightarrow [g \circ f] \textit{ est linéaire}$$

> **Pour des fonctions linéaires, la composée se distribue**, CàD

$$(f_1 + f_2) \circ g = (f_1 \circ g) + (f_2 \circ g)$$
$$f \circ (g_1 + g_2) = (f \circ g_1) + (f \circ g_2)$$

2 Injectivité-Surjectivité et linéarité.

2.1 Noyau et injectivité.

Définition 4. Définition du noyau

Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $h \in \mathscr{L}(E,F)$, CàD une fonction linéaire de E à valeurs dans F.

Le noyau h, noté $\ker(h)$, est l'ensemble

$$\ker(h) = \left\{ \overrightarrow{u} \in E \textit{ tel que } h(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \right\}$$

Remarque Kulturel : ker de l'allemand der Kern, le noyau

Théorème 5. Propriétés des noyaux

Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $h \in \mathscr{L}(E,F)$

> **Ssev.** $\ker(h)$ est un ssev du $\mathscr{D}_{épart} = E$.

> **Définition.** $\overrightarrow{u} \in \ker(h) \iff h(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$
$\iff$ on résout l'équation $h\left(\overrightarrow{U}\right) = \overrightarrow{0}$
$\iff$ On en déduit une famille géné de $\ker(h)$

> **Noyau et injectivité.** la fonction h est injective $\iff \ker(h) = \{\overrightarrow{0}\}$
$\iff \dim(\ker h) = 0$

2.2 Image et surjectivité.

Définition 6. Rappel : L'image d'une fonction

Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $h \in \mathscr{L}(E,F)$, CàD une fonction linéaire de E à valeurs dans F.

L'image de h, noté $\mathrm{Im}(h)$, est l'ensemble des vecteurs de $\mathscr{A} = F$
de la forme $h(a)$ avec a un vecteur de $\mathscr{D} = E$

Théorème 7. Propriétés de $\mathrm{Im}(h)$

Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $h \in \mathscr{L}(E,F)$

On a

> **Ssev.** $\mathrm{Im}(h)$ est un ssev du $\mathscr{A}_{rrivée} = F$.

> **Définition.** $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(h) \iff$ *Il existe* $\overrightarrow{a} \in \mathscr{D}$ tel que $h(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{u}$

Application : $\overrightarrow{b} \in \mathrm{Im}(h)$ Ssi l'équation $h(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{b}$ admet des solutions

Application : f est surjective $\iff \mathrm{Im}(f) = F$
$\iff \dim(\mathrm{Im}h) = Top < \infty$

2.3 Théorème du rang.

Théorème 8. théorème du rang

Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$,

On a : $\dim ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathscr{D}_{épart} = \dim(E)$.

3 À quoi ça sert ?

3.1 Résoudre les équations

Retour sur quelques Équation/Situation "classique/théorique/pratique"

> Lorsque h réalise une bijection de E sur E'

Alors Pour tout $b \in E'$, l'équation $h(X) = b$ admet une unique solution

> Résoudre le système d'équation.

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases} \iff \underbrace{\text{On trigonalise}}_{\text{pratique}} \iff \underbrace{A\overrightarrow{U} = \overrightarrow{b}}_{\text{Théorie}}$$

Théorème 9. Résoudre les équations $h\left(\overrightarrow{X}\right) = \overrightarrow{b}$

Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $\varphi : E \longrightarrow F$ un morphisme.
Soit $\overrightarrow{b} \in F$ un vecteur (fixé)

Les solutions de l'équation $\varphi\left(\overrightarrow{X}\right) = \overrightarrow{b}$ sont la somme, la superposition de

> Une sol particulière, $\overrightarrow{X_0}$

> Les solution $\overrightarrow{h}$ de l'équation homogène $\varphi\left(\overrightarrow{X}\right) = \overrightarrow{0}$, CàD les vecteurs du noyau,

Ainsi on a : $h\left(\overrightarrow{X}\right) = \overrightarrow{b} \iff \overrightarrow{X} = \overrightarrow{X_0} + \overrightarrow{h}$ *avec* $\overrightarrow{h} \in \ker\varphi$

Exemple : *On dit qu'une équation différentielle est une EDL si/lorsque ce théorème s'applique*

- Résoudre l'EDL2 : $y'' + 2y' - 3y = x^2 + 1$ Ici $\varphi : \begin{array}{l} \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ y \longmapsto \varphi(y) = y'' + 2y' - 3y \end{array}$ et $b : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto b(x) = x^2 + 1 \end{array}$

3.2 Transporter des bases

Théorème 10. Base/Bijectivité

Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $h : E \longrightarrow F$ un morphisme.
Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est une base de $\mathscr{D}_{épart} = E$ et h un morphisme.

h est injective $\iff$ $\big(h(\overrightarrow{e_1}), h(\overrightarrow{e_2}), ..., h(\overrightarrow{e_n})\big)$ est une famille libre ~~(base)~~ de F

h est surjectif $\iff$ $\big(h(\overrightarrow{e_1}), h(\overrightarrow{e_2}), ..., h(\overrightarrow{e_n})\big)$ est une famille géné ~~(base)~~ de F

Conclusion : h est bijectif $\iff$ $\big(h(\overrightarrow{e_1}), h(\overrightarrow{e_2}), ..., h(\overrightarrow{e_n})\big)$ est une famille base de F

Exemple : Les polynômes interpolateurs de Lagrange.

4 Bijection réciproque.

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est une base du $\mathscr{D}_{épart}$
Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, CàD une fonction linéaire de E à valeurs F.

On connait les résultats suivants

> Définition de bijective.

$$f \text{ est bijective} \iff \begin{cases} f \textit{ est injective} \\ \\ f \textit{ est surjective} \end{cases}$$

> inj-surj et linéarité.

f *est injective* $\iff \ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.
f *est surjective* $\iff \mathscr{A}_{rrivée} = \mathrm{Im}(f) = vect($ *l'image d'une base* $)$.
Et en plus, il y a le théorème du rang.

Théorème 11. linéaire bijective

La bijection réciproque d'une fonction linéaire est encore linéaire.

Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit $f \in Isom(E,F)$, CàD une fonction linéaire **bijective** de E sur F.

Alors la bijection réciproque f^{-1} est une fonction linéaire, CàD

$$\left.\begin{array}{r} f \textit{ est linéaire} \\ \\ f \textit{ est bijective} \end{array}\right\} \Longrightarrow f^{-1} \textit{ est linéaire}$$

5 Endomorphisme.

5.1 Définition et structure algébrique.

Définition 12. Endomorphisme, Automorphisme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f une fonction.

> On dit que f est un endomorphisme de E Ssi la fonction f est une application linéaire de E à valeurs dans E.
$\mathscr{L}(E)$, c'est l'ensemble des endomorphismes de E.

> On dit que ϕ est un automorphisme de E Ssi la fonction f est un endomorphisme bijectif de E.
$Aut(E)$ ou $GL(E)$, c'est l'ensemble des automorphismes de E.

Théorème 13. Opérations classiques dans $\mathscr{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f, g, h des endomorphismes de E.
On a

> **CL.** $\lambda f + \mu g$ est encore un endomorphisme de E
Ainsi $\mathscr{L}(E)$ est stable par CL

> **Composée.** $f \circ g$ et $g \circ f$ se calculent et sont des endomorphismes
De plus **la composée se distribue** (comme un produit)
$(f_1 + f_2) \circ g = (f_1 \circ g) + (f_2 \circ g)$
et
$f \circ (g_1 + g_2) = (f \circ g_1) + (f \circ g_2)$

Sauf exception, $f \circ g \neq g \circ f$.

Théorème 14. injectif, surjectif, bijectif

E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $h \in \mathscr{L}(E)$, un endomorphisme de E

On suppose que $\dim(E) = n < \infty$, alors on a

$$h \text{ est injectif} \iff h \text{ est surjectif} \iff h \text{ est bijectif}$$

`Attention l'hypothèse` $\dim(E) = n < \infty$ `est indispensable.`

Structure algébrique.

> Comme $\mathscr{L}(E)$ est stable par CL, $(\mathscr{L}(E), +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

> Comme (entre autre) la composition $\circ$ se distribue, $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau non-commutatif.

Théorème 15. Le groupe $GL(E)$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $Aut(E)$, l'ensemble des automorphismes de E

Alors $(Aut(E), \circ)$ est un groupe.
Ce qui explique l'autre notation, CàD $Aut(E) = GL(E)$.

En fait $(Aut(E), \circ)$ est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$.

5.2 Calculs avec les endomorphismes.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f, g, h des endomorphismes de E.

> La fonction $id_E : E \longrightarrow E; \vec{u} \longmapsto \vec{u}$.

la célèbre fonction id_E est un endomorphisme bijectif de E,
c'est donc un automorphisme de E

> Composée itérée.

Comme f est un endomorphisme,
on peut le composer avec lui même ainsi

$f \circ f$ et $f \circ f \circ f$ se calculent et sont des endomorphismes

Notation classique : On note souvent f^2 à la place de $f \circ f$ et f^3 à la place de $f \circ f \circ f$,
Convention : $f^0 = id_E$

> Polynôme d'endomorphisme.

Comme on peut faire des CL avec des endomorphismes
et que id_E, f, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$,... sont des endomorphismes
Alors le "polynôme" $2f^2 + 3f - 4id_E = 2[f \circ f] + 3f - 4id_E$
se calcule et est un endomorphisme.

`Avec des endomorphismes, la composée se distribue comme un produit,`
les opérations classiques sur les polynômes sont valides. Ainsi

$$(2f^2 + 3f - 4id_E) \circ (f^2 - f + 2id_E) = [4]\, f^4 + [3-2]\, f^3 + [4-3-4] f^2 + [6+4]\, f - [8]\, id_E$$

> Binôme.

Comme la composée avec des endomorphismes se comporte comme un produit non commutatif
donc en plus des opérations classiques on a
Comme $f \circ id_E = id_E \circ f$, on a

$$(id_E + f)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k = \underbrace{id_E}_{k=0} + \underbrace{nf}_{k=1} + \underbrace{\binom{n}{2} f \circ f}_{k=2} + \cdots$$

Plus généralement, Lorsque $f \circ g = g \circ f$, on a $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k . g^{n-k}$

> Nilpotent.

On dit que f est un endomorphisme nilpotent d'ordre 3 Ssi $f^3 = f \circ f \circ f = 0$.

6 Exercices.

Exercice 1. Pour les fonctions f suivantes :

$f:(x,y)\longmapsto(x+2y\,,2x-y)$

$f:(x,y)\longmapsto(x+2y\,,2x-y+1)$

$f:(x,y)\longmapsto(x+2y\,,2x-y\,,3x+y)$

$f:(x,y,z)\longmapsto(y-x\,,x+y+z\,,x-y)$

$f:(x,y,z)\longmapsto(x+y\,,2x+y+z,2)$

$f:(x,y,z)\longmapsto(x+y\,,-2x+y)$

1. Préciser $\mathscr{D}$ et $\mathscr{A}$.
   Quand c'est possible, déterminer une matrice A tel que $f(\overrightarrow{u})=A\overrightarrow{U}$.
   Les fonction f sont-elle des morphismes ?
2. Quand f est un morphisme. On admet que f est bijective Ssi A est inversible.
   Déterminer parmi les morphismes ceux qui sont bijectif.
3. Quand f est un morphisme non bijectif, déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 2. On considère

$$H=\{\overrightarrow{u}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \textit{ tel que } x_1+2x_2+\cdots+n\,x_n=0\}$$

1. Approche classique.
   Montrer que H est un ssev, déterminer une base et la dimension de H.
2. Approche avec les morphismes.
   (a) Déterminer une matrice A tel que
   $$\overrightarrow{u}\in H \iff x_1+2x_2+\cdots+n\,x_n=0 \iff A\overrightarrow{U}=0$$
   Trouver un morphisme f tel que $H=\ker(f)$.
   (b) Déterminer $\text{Im}(f)$. En déduire la dimension de H.

Exercice 3. [Correction] Reprendre les questions de l'exercice précédent avec

$$H=\left\{\overrightarrow{u}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \textit{ tel que } \left\{\begin{array}{c} x_1+2x_2+\cdots+n\,x_n=0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n=0\end{array}\right.\right\}$$

Exercice 4. La fonction associée à la matrice A.

Soit $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice 2×2. On considère la fonction h_A définie par

$$\forall\,\overrightarrow{X}\in\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\quad h_A\left(\overrightarrow{X}\right)=A\overrightarrow{X}$$

1. Montrer que $h_A\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.
2. On suppose que la matrice A est inversible.
   Montrer que : h_A est bijective et déterminer h_A^{-1}. .

Exercice 5. On considère la fonction f définie par

$$\forall\,M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\quad f(M)=M+M^T$$

Rappel : Déterminer un ssev H signifie trouver une base de H et la dimension de H.

1. Montrer que $f\in\mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer $\ker(f)$. En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.
3. Déterminer l'image d'une base $\mathscr{D}$ par f, en déduire l'image de $\text{Im}(f)$ puis la dimension $\ker(f)$.

Exercice 6. [Correction] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.
On considère la fonction f définie par
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + tr(M)A$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
2. On va déterminer $Ker(f)$
   (a) Montrer que : $\ker(f) \subset vect(A)$
   (b) Étudier si $vect(A) \subset \ker(f)$ et conclure que
   Lorsque $tr(A) = -1$ alors $\ker(f) = vect(A)$
   Lorsque $tr(A) \neq -1$ alors $\ker(f) = \{0\}$.
3. On suppose que $tr(A) \neq -1$.
   Montrer que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $C + tr(C)A = B$.

Exercice 7. On considère la fonction f définie par
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \\ P(-1) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$.
2. Montrer que : f est injective puis que f est bijective.
3. Déterminer l'image d'une base de $\mathcal{D}$ par f. En déduire que f est surjective puis que f est bijective.
4. En utilisant la bijectivité de f, montrer qu'il existe un unique polynôme de degré $\leqslant 2$ tel que
$$P(1) = 2, \quad P(2) = -1, \quad P(-1) = 1$$

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f définie par
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = 2P'' + 3P' - 5P$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Montrer, en utilisant le degré, que : $ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$. En déduire que : f est bijective.
3. Déterminer l'image d'une base de $\mathcal{D}$ par f. En déduire que f est surjective puis que f est bijective.
4. En utilisant la bijectivité de f, montrer qu'il existe un unique polynôme de degré $\leqslant 3$ tel que
$$2P'' + 3P' - 5P = 3X^3 - 1$$

Kulture : Cet exercice est la démonstration du principe du miroir.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f définie par
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f\Big(P(X)\Big) = P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer l'image d'une base de $\mathcal{D}$ par f. En déduire que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$
3. En utilisant $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer qu'il existe un polynôme de degré $\leqslant 3$ tel que
$$P(X+1) - P(X) = X^2$$

Exercice 10. On considère la fonction f définie par
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = \big(P(0), P'\big)$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que : f est injective.
3. Montrer que f est surjective.

Correction.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Approche classique.
2. Approche avec les morphismes.

(a) On veut

$$\vec{u} \in H \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + \cdots + n x_n = 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \end{array} \right. \iff A\vec{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ convient

On considère la fonction f définie par $f(\vec{u}) = A\vec{U}$

on a $\vec{u} \in H \iff A\vec{U} = 0 \iff f(\vec{u}) = 0 \iff \vec{u} \in \ker(f)$.

Donc $H = \ker(f)$.

(b) Étude de $\text{Im}(f)$.

> La fonction f est définie de $\mathscr{D} = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathscr{A} = \mathbb{R}^2$.

> $\text{Im}(f)$ est un ssev de $\mathscr{A} = \mathbb{R}^2$
Donc $\dim(\text{Im}(f)) \leqslant 2$.

> Le théorème du rang n'apporte aucune information tangible.

> On sait

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= vect(\text{ l'image d'une base }) \\ &= vect(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \ldots, f(\vec{e_n})) \end{aligned}$$

Or $f(\vec{e_1}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{C_1}}, \quad f(\vec{e_2}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{C_2}}, \ldots.$

Les vecteurs $\vec{C_1}, \vec{C_2}$ forment une famille libre de $\text{Im}(f)$ car $\neq 0$ et non $//$.
Ainsi $\dim(\text{Im}(f)) \geqslant cardinal(libre) = 2$

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \dim(\text{Im}(f)) = 2.}$

Grâce au théorème du rang, on a $\dim(H) = \dim(\ker(f)) = n - 2$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On considère la fonction f définie par

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + tr(M) A$$

1. Comme $M, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il est clair que f est à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Linéaire ?

> $\vec{0} \longmapsto \vec{0}$? On a $f(0) = 0 + tr(0)\, A = 0$,
Donc f conserve le vecteur nul.

> $CL \longmapsto CL$? On a

$$f(\lambda M + \mu M') = (\lambda M + \mu M') + tr(\lambda M + \mu M')\, A$$

Or on sait que : $tr(\lambda M + \mu M') = \lambda\, tr(M) + \mu\, tr(M')$

Finir les calculs.

2. On va déterminer $Ker(f)$

(a) On va démontrer $\ker(f) \subset Vect(A)$ avec la définition.
On suppose que $M \in \ker(f)$

$\boxed{\text{On va montrer que : } M \in Vect(A)}$

Comme $M \in \ker(f)$, on a $f(M) = M + tr(M) A = 0$.

Ainsi $M = -tr(M)\, A \in Vect(A)$ car $-tr(M) \in \mathbb{R}$ est un scalaire.

(b) On suppose que $M \in Vect(A)$.

On va calculer $f(M)$

Comme $M \in Vect(A)$, on a $M = \lambda A$, ainsi

$$f(M) = (\lambda A) + tr(\lambda A)A = \lambda\,[1 + tr(A)]\,A$$

$>$ Lorsque $tr(A) = -1$ alors $f(M) = 0$ donc $Vect(A) \subset \ker(f)$ et donc $\ker(f) = Vect(A)$.

$>$ Lorsque $tr(A) \neq -1$ alors $\lambda = 0$ et donc $\ker(f) = \{0\}$.

3. On suppose que $tr(A) \neq -1$.
On vient de voir que $ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$ la fonction f est injective.
Ainsi f est un endomorphisme, injectif de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n^2 < \infty$

Donc f est bijectif, c'est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $\forall B \in \mathscr{A} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $f(M) = B$ admet une unique solution notée C

Conclusion : $\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $C + tr(C)A = B$.