Programme de colle de la semaine 16

du Lundi 02 Février au 06 Février.

Questions de cours et autour du cours.

> Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.

Démonstration de l'existence *et l'unicité* des coordonnées d'un vecteur dans une base.

Définir la matrice des coordonnées.

Application : Pour $i \in \{0, 1, ..., n\}$, on considère le polynôme $P_i = X^i (1 - X)^{n-i}$

Déterminer la matrice des coordonnées de P_0, P_1 et même P_i dans la base $(X^0, ..., X^n)$

> Polynôme interpolateur de Lagrange : Base et coordonnée.

On considère $P_1 = \cancel{(X-1)}(X-2)(X-3)(X-4)$, $P_2 = (X-1)\cancel{(X-2)}(X-3)(X-4)$ et de même P_3 et P_4

Justifier que la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) forme une base ....

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Définir et calculer les coordonnée P dans cette base.

> Injectivité et noyau.

Définition de : "la fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{A}$ est injective."

Soit $\varphi : E \longrightarrow E'$ un morphisme.

Démonstration de : φ est injectif Ssi $\ker(\varphi) = \{\overrightarrow{0}\}$

> Image d'une fonction.

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{A}$ une fonction. Définition et propriétés de $\text{Im}(f)$.

Soit $\varphi : E \longrightarrow E'$ un morphisme.

Démonstration de $\text{Im}(f)$ est un ssev du E'.

Démonstration de $\text{Im}(f) = vect\,(l'image\ d'une\ base\ du\ \mathscr{D}épart)$

> Formule du rang.

Soit $\varphi : E \longrightarrow E'$ un morphisme.

Énoncer la formule du rang.

On suppose que $\dim(E) < \dim(E')$.

Peut-on avoir $\dim(\text{Im}\varphi) = \dim(E')$. La fonction φ est-elle surjectif.

On suppose que $\dim(E) > \dim(E')$. Justifier que φ n'est pas injectif.

Peut-on avoir $\dim(\ker\varphi) = 0$. La fonction φ est-elle injective.

> Bijectivité et Base.

Soit $\phi : E \longrightarrow E'$ un morphisme. Soit $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_p}\}$ une famille base de $\mathscr{D}épart = E$.

On note $\left(\phi\left(\overrightarrow{e_1}\right), ..., \phi\left(\overrightarrow{e_p}\right)\right)$ l'image de la base par ϕ

On suppose que ϕ est bijective.

Montrer que : $\left(\phi\left(\overrightarrow{e_1}\right), ..., \phi\left(\overrightarrow{e_p}\right)\right)$ est une base de E'

On suppose que $\left(\phi\left(\overrightarrow{e_1}\right), ..., \phi\left(\overrightarrow{e_p}\right)\right)$ est une base de E'

Montrer que : ϕ est bijective.

Exercices.

Des exercices du type de la banques CCP (et/ou TD) que je joins.

Attention : je n'ai pas encore fait les sommes de ssev, ni les symétries/projections.

Exercice 1. [Correction] **Banque CCP n°59**

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$

On considère la fonction f définie par : $\forall\, P \in E,\ f\,(P) = P - P'$.

1. Démontrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$, CàD f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Noyaux et injectivité.
   (a) En utilisant les degrés, déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker} f$.
   (b) En utilisant la théories des équations différentielle, déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker} f$.
3. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
4. Soit $Q \in E$.
   (a) Justifie qu'il existe un unique $P \in E$ tel que $f\,(P) = Q$.
   (b) Déterminer P.

   Indication : On sait que $Q = P - P'$. Calculer Q', Q'',.....

Correction inspirée de la correction officielle.

1. f est linéaire ?.

   à faire rapidement avec la définition

   À valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$

   Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P = aX^n + \cdots$

   Ainsi $f(P) = P - P' = (aX^n + \cdots) - \left(naX^{n-1} + \cdots\right) = aX^n + \cdots \in \mathbb{R}_n[X]$

   Conclusion : f est bien un endomorphisme de E.
2. (a) En utilisant les degrés, déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker} f$.

   Soit P un polynôme $\neq \mathscr{O}$ de $\ker(f)$

   Ainsi on a $P = \underbrace{a}_{\neq 0} X^\alpha + \cdots$ et $\alpha \leqslant n$

   Ainsi on a $f(P) = P - P' = (aX^\alpha + \cdots) - \left(\alpha a X^{\alpha-1} + \cdots\right) = aX^\alpha + \cdots$

   Donc $f(P) = \mathscr{O} \iff aX^\alpha + \cdots = \mathscr{O} \implies a = 0 OUPS$

   Conclusion : Il n'y a pas de vecteur/polynôme $\neq \mathscr{O}$ dans $\ker(f)$, CàD $\ker f = \{\overrightarrow{O}\}$

   Donc f est injectif.

   (b) En utilisant la théories des équations différentielle, déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker} f$.

   On a $P \in \mathrm{Ker} f \iff P' - P = 0$ *et P est un polynôme*

   On résout l'EDL1

   $\iff \exists K\ tq\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) = Ke^x$ *et P est un polynôme*

   Or $P(x) = Ke^x$ est un polynôme SSi $K = 0$

   Conclusion : $\ker f = \{\overrightarrow{O}\}$ et f est injectif.
3. L'endomorphisme f est-il surjectif ?

   Avec le théorème du rang, on a $\underbrace{\dim(\ker f)}_{=0} + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathscr{D}\acute{e}part) = n + 1$

   Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_n[X]$ et $\dim(\mathrm{Im} f) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$

   Conclusion : $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}_n[X]$ et f est surjective.
4. Soit $Q \in E$.
   (a) Justifie qu'il existe un unique $P \in E$ tel que $f\,(P) = Q$.

   La fonction f est injective et surjective donc elle est bijective.

   Ainsi l'équation $f\,(P) = Q$ admet une unique solution.

   (b) Déterminer P.

   On a en dérivant $P - P' = Q$.

   $$P' - P'' = Q'$$

   $$P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$$

   De plus $P^{(n+1)} = 0$ car $P \in \mathbb{R}_n[X]$. En sommant ces $(n+1)$ égalités, on obtient

   $$P = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$$

Exercice 2. [Correction] **Banque CCP n°60**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker} f$.
2. Avec les théorème du rang, déterminer $\dim(Im(f))$? f est-il surjectif ?
   Déterminer une base de Im(f).
3. Vérifier que : $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = vect\{\mathscr{O}\}$

Correction.

1. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker} f$.

On a $M \in \ker(f) \iff M \in \mathcal{M}_2(R) \ et \ f(M) = 0$

$$\begin{aligned}
&\iff AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} a+2b & c+2d \\ 2a+4b & 2c+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & 2b & & & = & 0 \\ & & & c & + & 2d & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \vec{U} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = b \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{C_1}} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{C_2}} \\
&\iff M = b \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2} \\
&\iff M \in vect(M_1, M_2)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$\ker(f) = vect(M_1, M_2)$ ainsi la famille (M_1, M_2) est génératrice de $\ker(f)$

De plus le famille (M_1, M_2) est libre car $\vec{C_1}, \vec{C_1}$ est en escalier

Donc c'est une base de $\ker(f)$ et $\dim\Big(\ker(f)\Big) = 2$

2. Avec les théorème du rang, déterminer $\dim(Im(f))$? f est-il surjectif ?

Le théorème du rang assure que $\dim(Im(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim\Big(\ker(f)\Big) = 4 - 2 = 2.$

De plus on sait que Im(f) $= vect$ (l'image d'une base de $\mathscr{D}$ épart). On a

$$A = f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ B = f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \ C = f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ D = f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc Im(f) $= vect\,(A, B, C, D) =$ Im(f) $= vect\,(A, C)$ car $B = 2A$ et $D = 2C$

Conclusion : La famille (A, C) est génératrice et libre (car $\neq 0$ et non//) Donc c'est une base de Im(f).

3. Vérifier que : $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = vect\{\mathscr{O}\}$

Soit $M \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$.

D'après Q1. et Q2., $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aM_1 + bM_2 = \begin{pmatrix} -2a & -2b \\ a & b \end{pmatrix}$ et $M = cA + dC = \begin{pmatrix} c & d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$.

On a donc $\left\{ \begin{array}{ccc} -2a & = & c \\ a & = & c \\ -2b & = & d \\ b & = & 2d \end{array} \right.$.

On en déduit que $a = b = c = d = 0$. Donc $M = 0$.

Conclusion : $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.