Exercice 1. [Correction] Soit $n \geqslant 2$ fixé.
On s'intéresse dans ce problème à des puissances de matrices symétriques.
On rappelle que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, noté $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, est l'ensemble des matrices M de taille $n \times n$ et vérifiant $M^T = M$

1. Montrer que pour tout $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$: $tr\left(M^2\right) = tr\left(M^T.M\right) \geqslant 0$ et que $tr(M^2) = 0 \iff M = \mathscr{O}_n$.
   Le résultat servira plusieurs fois par la suite !
2. Montrer que : pour tout $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $M^k \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\mathscr{O}_n$ est la seule matrice nilpotente de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

   On s'intéresse désormais aux matrices symétriques dont une puissance est la matrice identité.
   Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathscr{U}_p = \{M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \mid \quad M^p = I_n\}$, puis $\mathscr{U} = \bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}^*} \mathscr{U}_p$.
3. On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1
   On note pose $M(a,b) = aI_n + bJ$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.
   Enfin $\mathscr{M} = \{M(a,b) \mid \quad a, b \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Montrer, **SANS récurrence**, que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$: $\quad M(a,b)^p = M\left(a^p, \dfrac{(a+nb)^p - a^p}{n}\right)$.
   On remarquera que $J^2 = nJ$
   (b) En déduire que pour tout $M \in \mathscr{M} \cap \mathscr{U}$: $\quad M^2 = I_n$.
4. Soit $M \in \mathscr{U}_4$. Simplifier $\left(M^2 - I_n\right)^2$ et $\left(M^3 - M\right)^2$, puis montrer que $M^2 = I_n$.
5. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ impair et $M \in \mathscr{U}_p$. On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{p-1} M^k$.
   (a) Montrer que $S^2 = pS$.
   (b) Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, on note r_k le reste de la division euclidienne de $2k$ par p.
   Montrer que la fonction $k \longmapsto r_k$ est bijective de $[\![0, p-1]\!]$ sur lui-même.
   (c) En déduire que $\sum\limits_{0 \leqslant i,j \leqslant p-1} \left(M^j - M^i\right)^2 = 0$, puis que $M = I_n$.

   Ce résultat est très spécifique aux matrices symétriques.
   Par exemple, pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on vérifie facilement que $M^3 = I_3$, mais $M \neq I_3$.
6. Montrer que pour tout $M \in \mathscr{U}$: $\quad M^2 = I_n$.