Exercices classiques

Exercice 1. [Correction] Soit J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ la base canonique $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par : $\forall \overrightarrow{U} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, *tel que* $f(\overrightarrow{U}) = J\overrightarrow{U}$

Pour tout vecteur $\overrightarrow{t} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on note $\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{t}$.

Partie I Soit $\overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et Q l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à $\overrightarrow{a}$.

1. Montrer que Q est un plan vectoriel (CàD ssev et dim=2) et que Q est stable par f.
2. On pose $\overrightarrow{b} = (1, {}^{-1}/_2\,, {}^{-1}/_2\,)$ et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$.
   (a) Vérifier que $\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ est une base de Q.
   (b) Décomposer $f\left(\overrightarrow{b}\right)$ et $f\left(\overrightarrow{c}\right)$ sur le vecteurs $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.
   Trouver un réel θ tel que : $f\left(\overrightarrow{b}\right) = \cos\theta\, \overrightarrow{b} + \sin\theta\, \overrightarrow{c}$ et $f\left(\overrightarrow{c}\right) = -\sin\theta\, \overrightarrow{b} + \cos\theta\, \overrightarrow{c}$
   (c) Interpréter géométriquement la restriction de f au plan Q.

Partie II On définit ainsi les matrices colonnes à coefficients complexes $\overrightarrow{X_1} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{B} + i\,\overrightarrow{C}$ et $\overrightarrow{X_3} = \overrightarrow{B} - i\,\overrightarrow{C}$

De plus on désigne par $P = \left(\overrightarrow{X_1} \,|\, \overrightarrow{X_2} \,|\, \overrightarrow{X_3}\right)$ la matrice carré d'ordre 3, qui regroupe les vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3}$

1. Calculer P en fonction de j et j^2. Rappel : j est le célèbre complexe..
2. Soit $\overline{P}$ la matrice dont les coefficient sont les conjugués de ceux de P.
   Calculer $P\overline{P}$ en fonction de la matrice I. Que peut-on déduire de ce calcul ?
3. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer $J\,\overrightarrow{X_i}$ en fonction de $\overrightarrow{X_i}$.

Exercice 2. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base classique.
On considère les applications suivantes

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \;;\; P \longmapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$$

$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \;;\; P \longmapsto P(1)$$

On convient que $f^0 = id$ et que $f^n = f \circ \ldots \circ f$

1. Justifier que ϕ est un morphisme de $\mathbb{R}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   En ce que ϕ est le morphisme nul ? En déduire que Im$(\phi) = \mathbb{R}$ et une base de son noyau.
2. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Soit les polynômes $P_0 = 1,\ P_1 = -2X + 1,\ P_2 = 6X^2 - 6X + 1$.
   (a) Justifier que : $\mathscr{C} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Calculer $f(P_0), f(P_1), f(P_3)$ en fonction de P_0, P_1 et P_2 Le résultat est simple ! ! ! !
4. Soit le polynôme $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{C}$
   (b) En utilisant la question Q3b., calculer $[\phi \circ f^n](P)$ en fonction de a, b, c.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} [\phi \circ f^n](P) = \int_0^1 P(t)dt$

Exercice plus difficile

Exercice 3. [Correction] Soit $k \in \mathbb{N}$, On définit les polynômes N_k par

$$N_0 = 1 \quad \text{et} \quad N_k = \frac{1}{k!}\prod_{p=0}^{k-1}(X-p) = \frac{1}{k!}X\,(X-1)\cdots\Big(X-(k-1)\Big)$$

On introduit la fonction Δ par $\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
On note classiquement $\Delta^i = \Delta \circ \Delta \circ \ldots . \circ \Delta$

1. Autour des (N_k).
   (a) Montrer que $\big(N_0,\, N_1, \cdots,\, N_n\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n\,[X]$.
   (b) Calculer $\Delta(N_0)$, $\Delta(N_1)$ et $\Delta(N_3)$
   (c) Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \Delta(N_k) = N_{k-1}$
   (d) En discutant selon la valeur de i, Calculer $\Delta^i\,(N_k)$ puis $[\Delta^i\,(N_k)](0)$.
2. Étude de Δ
   (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n\,[X]$.
   (b) Démontrer (Admettre) que les polynômes 1-périodique sont constants.
   En déduire que : $\ker\Delta = \mathbb{R}_0\,[X]$.
   (c) Montrer que : Im$(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ puis que : Im$\Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n\,[X]$ fixé.
   (a) Justifier qu'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que $P = a_0\,N_0 + \cdots + a_n\,N_n$.
   Cette décomposition est-elle unique ?
   (b) Calculer les a_i en fonction des $[\Delta^i(P)](0)$.
   (c) On considère la fonction T définie par $\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ T(P) = P(X+1)$.

   $>$ Relier Δ et T.

   $>$ En déduire que : $\Delta^i(P) = (-1)^i \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{i} \binom{i}{\alpha} (-1)^\alpha\ P(X+\alpha)$

   Moralité : on sait calculer les scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_n$ en fonction de $[\Delta^i(P)](0)]$
   et donc en fonction de $P(0)$,$P(1)$,...(n)

Vraiment difficile sans l'indication

Exercice 4. [Correction] Soit P un polynôme de degré n.

Démontrer que la famille $\Big(P(X), P(X+1), P(X+2)\ldots, P(X+n)\Big)$ est libre

Indication : On suppose que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, P(X+k) = 0$

On remarque que la famille $(P, P', P'', \ldots .)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

On en déduit $\forall\, A(X) \in \mathbb{R}_n[X],\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, A(X+k) = 0.$

Puis on conclut

Un exercice sympa

Cet exercice propose une nouvelle démonstration du théorème des EDL2.
Il est original (pour la sup) et il permet de démontrer quelque chose.

Exercice 5. [Correction] Soit $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathscr{C}^\infty$ fixés.

On considère l'équation différentielle E.

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + a(x)\ y'(x) + b(x)\ y(x) = 0$$

Le but de cet exercice est de décrire les solution de E.

On suppose qu'il existe deux fonctions f, g telles que

$$\begin{cases} f \text{ est solution de l'équation différentielle et } f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = r \\ g \text{ est solution de l'équation différentielle et } g(0) = 1 \text{ et } g'(0) = r' \\ \quad \text{avec } r \neq r' \end{cases}$$

.

Soit y une solution l'équation différentielle E

1. Montrer que $\mathbb{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle E est un ssev
2. On définit sur $\mathbb{R}$ la matrice $W(x)$ et le réèl $\omega(x)$

$$W(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} \text{ et } \omega(x) = \det\left[W(x)\right] \qquad \text{note Kulturelle : } W \text{ c'est le Wronskien}$$

   (a) Vérifier que ω est solution d'une EDL1.
   En déduire une expression de $\omega(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Justifier que : $\forall x$, la famille $\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

3. Étude des coordonnées

   (a) Montrer que : $\forall\ x$, il existe λ_x et μ_x tel que $\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \lambda_x \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$

   (b) Justifier que les fonction $\lambda : x \longmapsto \lambda(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda_x$ et $\mu : x \longmapsto \mu(x) \overset{\text{def}}{=} \mu_x$ sont dérivables.

   (c) Montrer que $\forall\ x,\ \lambda'(x) = 0$ et $\mu'(x) = 0$

4. Conclusion

   (a) Déduire des calculs précédent que $y = CL(f, g)$.

   (b) Montrer que (f, g) est une base de $\mathbb{S}$ et ainsi $\dim \mathbb{S} = cardinal$ (base) $= 2$

Si on applique ce résultat avec des fonctions constantes a et b et les fonction $f(t) = e^{rt}$ et $g(t) = e^{r't}$ avec r, r' les solution de l'équation caractéristique $X^2 + aX + b = 0$

On obtient une nouvelle démonstration du théorème sur les EDL_2

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

Partie I

Soit $\overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et Q l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à $\overrightarrow{a}$.

1. Q est un plan vectoriel ?

   On a $\overrightarrow{u} \in Q \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{a} = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = 0 \iff \overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Donc $Q = vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ainsi Q est un plan vectoriel

   Q est stable par f ?

   On suppose que $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in Q$

   $$\boxed{\text{On doit montrer que } f(\overrightarrow{u}) = J\overrightarrow{U} \in Q}$$

   À faire.

2. On pose $\overrightarrow{b} = \left(1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$.

   (a) On trouve que $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = (0, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

   $\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ est une base de Q ?

   la famille est libre (car $\neq 0$ et non//), dans Q, cardinal=2 et $\dim(Q) = 2$

   Donc c'est une base de Q

   (b) Décomposer $f\left(\overrightarrow{b}\right)$ et $f\left(\overrightarrow{c}\right)$ sur le vecteurs $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

   On a

   $$f\left(\overrightarrow{b}\right) = J\,\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

   $$\text{et} \quad f\left(\overrightarrow{c}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

   Donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$ convient car $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   (c) Interpréter géométriquement la restriction de f au plan Q.

   On fait un dessin et on constate que f est la rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Partie II

1. Calculer P en fonction de j et j^2.

   On a $\overrightarrow{X_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{B} + i\,\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{X_3} = \overrightarrow{B} - i\,\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$

   $$\text{Ainsi } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$$

2. Calculer $P\overline{P}$ en fonction de la matrice I. Que peut-on déduire de ce calcul ?

   On trouve $P\overline{P} = 3\,I_3$ Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}\overline{P}$

3. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer $J\,\overrightarrow{X_i}$ en fonction de $\overrightarrow{X_i}$.

   On a $J\,\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{X_1}$ et

   $$J\overrightarrow{X_2} = \begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix} = j^2 \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} = j^2\overrightarrow{X_2}$$

   et de même $J\overrightarrow{X_3} = j\overrightarrow{X_3}$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. ϕ est une forme linéaire ?

   On doit montrer que ϕ est linéaire et à valeur dans $\mathbb{R}$. Facile.

   Déterminer son image et une base de son noyau. ?

   $>$ Im(ϕ) est une ssev de $\mathscr{A} = \mathbb{R}$. Or $\dim(\mathbb{R}) = 1$

   Donc $\dim\left(\text{Im}(\phi)\right) = 0 \ ou \ 1.$

   Comme ϕ n'est pas la fonction nulle, donc Im(ϕ) n'est pas réduit au vecteur nul

   $$\text{Conclusion : } \dim\left(\text{Im}(\phi)\right) = 1 \text{ et } \in (f) = \mathbb{R} = \mathscr{A}$$

   .

   $>$ Avec le théorème du rang, on a $\dim\left(\ker(\phi)\right) = n$

   De plus la famille $\left((X-1), (X-1)^2, ..., (X-1)^n\right)$ est une famille libre (les degrés sont 2 à 2 $\neq$),

   dans $\ker(_phi)$ et de cardinal n

   donc c'est une base de $\ker(\phi)$

2. On doit montrer que ϕ est linéaire et à valeur dans $\mathbb{R}_2[X]$. Facile.
3. Soit les polynômes $P_0 = 1,\ P_1 = -2X + 1,\ P_2 = 6X^2 - 6X + 1.$
   (a) famille libre (les degrés sont 2 à 2 $\neq$),

   dans $\mathbb{R}_2[X]$ et de cardinal 3

   donc c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) On a

   $$\begin{aligned} P_0 &\xmapsto{f} f(P_0) = \cdots = 1 = P_0 \\ P_1 &\xmapsto{f} f(P_0) = \cdots = -X + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\, P_1 \\ P_2 &\xmapsto{f} f(P_0) = \cdots = \frac{6}{4}X^2 - \frac{6}{1}X + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\, P_2 \end{aligned}$$

4. Soit le polynôme $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}$.
   (a) On a

   $$\begin{aligned} P = a + bX + cX^2 &= \underset{\cdots}{\tfrac{c}{6}} \left[6X^2 - 6X + 1\right] + \underset{\cdots}{\tfrac{1}{2}(-c-b)} \left[-2X + 1\right] + \underset{\cdots}{a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{3}c} \left[1\right] \\ &= \underset{\cdots}{\tfrac{c}{6}}\, P_2 + \underset{\cdots}{\tfrac{1}{2}(-c-b)}\, P_1 + \underset{\cdots}{a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{3}c}\, P_0 \end{aligned}$$

   (b) À cause Q3b, on a

   $$\begin{aligned} P_0 &\xmapsto{f} f(P_0) = P_0 \xmapsto{f} \cdots \xmapsto{f} f^n(P_0) = P_0 \\ P_1 &\xmapsto{f} f(P_0) = \frac{1}{2}\, P_1 \xmapsto{f} \cdots \xmapsto{f} f^n(P_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n P_1 \\ P_2 &\xmapsto{f} f(P_0) = \frac{1}{4}\, P_2 \xmapsto{f} \cdots \xmapsto{f} f^n(P_1) = \left(\frac{1}{4}\right)^n P_2 \end{aligned}$$

   Grâce à la linéarité de f, on a

   $$\begin{aligned} f^n(P) &= \frac{c}{6}\, f^n(P_2) + \frac{1}{2}(-c-b)\, f^n(P_1) + a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c\, f^n(P_0) \\ &= \frac{c}{6}\,\frac{1}{4^n} P_2 + \frac{1}{2}(-c-b)\,\frac{1}{2^n} P_1 + \left(a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c\right)\, P_0 \end{aligned}$$

   Grâce à la linéarité de ϕ, on a $[\phi \circ f^n](P) = \frac{c}{6}\,\frac{1}{4^n}\phi(P_2) + \frac{1}{2}(-c-b)\,\frac{1}{2^n}\phi(P_1) + \left(a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c\right)\, \phi(P_0)$

   $$\text{Conclusion : } [\phi \circ f^n](P) = \frac{\frac{c}{6}}{4^n} + \frac{\frac{1}{2}(c+b)}{2^n} + \left(a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c\right)$$

   (c) On a maintenant

   $$\lim_{n\to\infty} [\phi \circ f^n](P) = \lim_{n\to\infty} \frac{c/6}{4^n} + \frac{\frac{1}{2}(c+b)}{2^n} + \left(a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c\right) = a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$$

   $$et$$

   $$\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 (a + bt + ct^2)\, dt = \Big[Primitive\Big]_0^1 = a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$$

   Donc c'est bien égale.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Soit $k \in \mathbb{N}$, On définit $N_0 = \hat{1}$ et $N_k = \dfrac{X\left(X-1\right)\cdots\left(X-(k-1)\right)}{k!}$

1. (a) Montrer que $\left(N_0,\, N_1, \cdots,\, N_n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n\left[X\right]$.

Il est clair que $N_k = \dfrac{X\left(X-1\right)\cdots\left(X-(k-1)\right)}{k!} = \dfrac{k \text{ facteurs}}{k!} = \dfrac{1}{k!}X^k + \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} \left(N_0, \cdots,\, N_n\right) \text{ est libre (car les deg sont 2 à 2} \neq \text{) et dans } \mathbb{R}_n\left[X\right] \\ \\ \text{card}\left(N_0, \cdots,\, N_n\right) = n+1 \\ \dim\left(\mathbb{R}_n\left[X\right]\right) = n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{c'est une base de } \mathbb{R}_n\left[X\right].$$

(b) Calculer $\Delta(N_0)$, $\Delta(N_1)$ et $\Delta(N_3)$

On a : $\Delta(N_3) = N_3(X+1) - N_3(X)$

$$= \frac{(X+1)(X)(X-1)}{6} - \frac{X(X-1)(X-2)}{6}$$

On voit une factorisation ! ! ! !

$$= \frac{(X)(X-1)}{6}\left[(X+1)-(X-2)\right] = \frac{X(X-1)}{2} = N_2$$

(c) Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \Delta(N_k) = N_{k-1}$

On a $\Delta\left(N_k\right) = N_k\left(X+1\right) - N_k\left(X\right)$

$$= \frac{\left(X+1\right)\left(X\right)\cdots\left(\left(X+1\right)-\left(k-1\right)\right)}{k!} - \frac{X\left(X-1\right)\cdots\left(X-\left(k-1\right)\right)}{k!}$$

$$= \frac{1}{k!}X\left(X-1\right)\cdots\left(X-\left(k-2\right)\right)\Big[\left(X+1\right)-\left(X-\left(k-1\right)\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{k!}X\left(X-1\right)\cdots\left(X-\left(k-2\right)\right)\left[k\right]$$

$$== \frac{1}{\left(k-1\right)!}X\left(X-1\right)\cdots\left(X-\left(k-2\right)\right) = N_{k-1}$$

(d) En discutant selon la valeur de i, Calculer $\Delta^i\left(N_k\right)$ puis $[\Delta^i\left(N_k\right)](0)$.

On a $N_k \overset{\Delta}{\longmapsto} N_{k-1} \overset{\Delta}{\longmapsto} N_{k-2} \overset{\Delta}{\longmapsto} \ldots \overset{\Delta}{\longmapsto} N_{k-i}$

ainsi $\Delta^i\left(N_k\right) = N_{k-i}$.

Mais attention Lorsque $i = k$, on a $N_{k-k} = N_0 = 1$ et lorsque $i > k$, on $Delta^i\left(N_k\right) = 0$.

Conclusion : $>$ *Pour* $i \in \{0, 1, ..., k-1\},\ \Delta^i\left(N_k\right) = N_{k-i}$

$>$ *Pour* $i = k,\ \Delta^k\left(N_k\right) = N_0 = X^0 = 1$

$>$ *Pour* $i > k,\ \Delta^i\left(N_k\right) = \mathscr{O}$

On évalue en 0 et on a

$$\Delta^i\left(N_k\right)\left[0\right] = \left\{\begin{array}{ll} = 0 \text{ si } i < k & \text{car } 0 \text{ est racine de } N_{k-i} \text{ car } k-i \geqslant 1 \\ = 1 \text{ si } i = k & \text{car } N_0 = 1 \\ = 0 \text{ si } i > k & \text{car } \Delta^i\left(N_k\right) = 0 \end{array}\right.$$

2. Étude de Δ

(a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n\left[X\right]$.

On fait linéaire *(facile à faire)*

$\boxed{\text{à valeurs dans } \mathbb{R}_n[X]\,?}$

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $P = a\,X^n + \cdots$.

Ainsi on a $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$

$$= \Big[a\left(X+1\right)^n + \cdots\Big] - \Big[a\,X^n + \cdots\Big]$$

$$= \Big[a\,X^n + \cdots\Big] - \Big[a\,X^n + \cdots\Big]$$

$$= X^n\ \left[a-a\right] + \cdots$$

Conclusion : $\Delta(P)$ est un polynôme de degré $\leqslant (n-1)$

Ainsi Δ est à valeur dans $\mathbb{R}_n[X]$ et même plus précisément dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

(b) Démontrer (Admettre) que les polynômes 1-périodique sont constants.
En déduire que : $\ker\Delta = \mathbb{R}_0\left[X\right]$.

On a $P \in \ker(\Delta) \iff$ P est un poly de degré $\leqslant n$ et $\Delta(P) = \mathscr{O}$

$\iff P(X+1) - P(X) = \mathscr{O}$

$\iff P(X+1) = P(X)$

$\iff$ P est un polynôme 1-périodique

$\iff$ P est un polynôme constant

$\iff P \in \mathbb{R}_0[X]$

Conclusion : $\ker(\Delta) = \mathbb{R}_0\,[X]$ et $\dim\left(\ker(\Delta)\right) = 1$

(c) Montrer que : Im$(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ puis que : Im$\Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$

On a déjà montré Im$(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ à la question Q2a.
Avec la formule du rang, on a $\dim\left(\text{Im}(\Delta)\right) = n$

Conclusion : Im$(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\dim\left(\text{Im}(\Delta)\right) = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$
Ainsi on a bien Im$(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n\,[X]$ fixé.

(a) Justifier qu'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que $P = a_0\, N_0 + \cdots + a_n\, N_n$.
Cette décomposition est-elle unique ?

Comme $P \in \mathbb{R}_n\,[X]$ et que $(N_0, \cdots, N_n)$ est une base de$\mathbb{R}_n\,[X]$, on sait que P s'écrit de façon unique comme CL sur les $(N_0, \cdots, N_n)$

i.e. il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ **uniques** tels que

$$P = a_0\, N_0 + \cdots + a_n\, N_n.$$

(b) Calculer les a_i en fonction des $[\Delta^i(P)](0)$.

On utilise la linéarité de Δ et les calculs des premières questions

$$\begin{aligned}\Delta^{\circ i}(P) &= \Delta^{\circ i}(a_0\, N_0 + \cdots + a_n\, N_n) \\ &= a_0 \Delta^{\circ i}(N_0) + \ldots + a_n\, \Delta^{\circ i}(N_n) \\ &= \underbrace{0 + .. + 0}_{\text{Ici } i>k} + a_i\, N_0 + a_{i+1}\, N_1 + \ldots + a_n\, N_{n-i}\end{aligned}$$

On évalue en 0 et on a $\Delta^{\circ i}(P)\,[0] = a_i$.

(c) On considère la fonction T définie par $\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ T(P) = P(X+1)$.

$>$ Relier Δ et T.

On a $\Delta = T - Id$

$>$ En déduire que : $\Delta^i(P) = (-1)^i \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{i} \binom{i}{\alpha} (-1)^\alpha\ P(X+\alpha)$

Comme T et id commutent, on a avec la formule du binôme

$$\Delta^{\circ i} \quad = \quad (T - id)^{\circ i} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} T^{\circ k} \circ (-id)^{\circ(i-k)} = (-1)^i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^k\ T^{\circ k}$$

Ici $T :\ \begin{array}{l} \mathbb{R}\,[X] \to \mathbb{R}\,[X] \\ P \longmapsto P\,(X+1) \end{array}$

On a facilement $T^{\circ k}\,(P) = \ldots. = P\,(X+k)$ Ainsi

$$\Delta^{\circ i}\,(P) = (-1)^i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^k\ T^{\circ k}\,(P) = (-1)^i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^k\ P\,(X+k)$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

On suppose que : $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, P(X+k) = 0$

> Comme $\deg(P) = n$, on a $\deg(P') = n-1$, $\deg(P'') = n-2$,..., $\deg(P^{(n)}) = 0$

la famille $(P, P', P'', ..., p^{(n)})$ a des degré 2 à 2 différents donc elle est libre et dans $\mathbb{R}_n[X]$

De plus elle est de cardinal $(n+1)$ et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$

$\boxed{\text{Conclusion : C'est } (P, P', P'', ..., p^{(n)}) \text{ une base de } \mathbb{R}_n[X]}$

> Pour tout $A(X) \in \mathbb{R}_n[X]$

Comme $(P, P', P'', ..., p^{(n)})$ une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe de scalaire tel que $A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, P^{(i)}(X)$

On a donc

$$A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, P^{(i)}(X)$$
$$A(X+1) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, P^{(i)}(X+1)$$
$$\vdots$$
$$A(X+n) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, P^{(i)}(X+n)$$

Ainsi en sommant, on a $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, A(X+k) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, P^{(i)}(X+k) \right)$

Or on sait que : $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, P(X+k) = 0$ ainsi $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, P^{(i)}(X+k) = 0$

$\boxed{\text{Conclusion : Pour tout } A(X) \in \mathbb{R}_n[X], \text{ on a } \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, A(X+k) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, 0 = 0}$

> Final : On applique cette dernière égalité avec A égale les polynômes interpolateurs de Lagrange et $X = 0$

Donc $\forall\, k \in \{0, 1, , ..., n\}$, $\lambda_k = 0$ Fini.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Facile $\overrightarrow{0}$ et CL.
2. (a) Montrer que ω est solution d'une EDL1. En déduire une expression de $\omega(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   On a $\omega(x) = \det\Big[W(x)\Big] = f(x)\,g'(x) - f'(x)\,g(x)$, ainsi

   $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \omega'(x) &= f'(x)\,g'(x) + f(x)\,g''(x) - f''(x)\,g(x) - f'(x)\,g'(x)\\ &= f(x)\,g''(x) - f''(x)\,g(x)\\ &\qquad \textit{Or on sait que } f, g \textit{ sont solution de } y'' + a(x)y' + b(x)y = 0\\ &= f(x)\,\Big[-a(x)g' - b(x)g\Big] - \Big[-a(x)f' - b(x)f\Big]\,g(x)\\ &= -a(x)\Big[f(x)\,g'(x) - f'(x)\,g(x)\Big]\\ &= -a(x)\omega(x)\end{aligned}$$

   Donc ω est solution de l'EDL1 $y' + a(x)\,y = 0$ et on sait d'après la théorie des EDL1 que $\forall x \in \mathbb{R},\ \omega(x) = K\,\exp(-A(x))$ avec $A(x)$ une primitive de $a(x)$

   Enfin pour $\omega(0) = r' - r$, donc $K = (r' - r)\exp(A(0)) \neq 0$

   (b) Justifier que : $\forall x$, la famille $\left(\begin{pmatrix} f(x)\\ f'(x)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x)\\ g'(x)\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

   Pour tout : $\forall x,\ \det\big(W(x)\big) = \omega(x) = K\,\exp(-A(x)) \neq 0$,

   donc la matrice $W(x)$ est inversible ou bien la famille $\begin{pmatrix} f(x)\\ f'(x)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x)\\ g'(x)\end{pmatrix}$ est libre.

3. Étude des coordonnées

   (a) Montrer que : $\forall\ x$, il existe λ_x et μ_x tel que ....

   La famille $\begin{pmatrix} f(x)\\ f'(x)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x)\\ g'(x)\end{pmatrix}$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ et cardinal=2 et $\dim R^2 = 2$. Donc c'est une base.

   De plus Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\begin{pmatrix} y(x)\\ y'(x)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

   donc il existe λ_x et μ_x tel que $\begin{pmatrix} y(x)\\ y'(x)\end{pmatrix} = \lambda_x \begin{pmatrix} f(x)\\ f'(x)\end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g(x)\\ g'(x)\end{pmatrix}$

   (b) Justifier que les fonction $\lambda : x \longmapsto \lambda(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda_x$ et $\mu : x \longmapsto \mu(x) \overset{\text{def}}{=} \mu_x$ sont $\mathscr{C}^\infty$.

   On va expliciter λ_x ey μ_x. On a

   $$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} y(x)\\ y'(x)\end{pmatrix} = \lambda_x \begin{pmatrix} f(x)\\ f'(x)\end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g(x)\\ g'(x)\end{pmatrix}\\ \iff &\begin{pmatrix} y(x)\\ y'(x)\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f(x) & g(x)\\ f'(x) & g'(x)\end{pmatrix}}_{=W(x)} \begin{pmatrix} \lambda_x\\ \mu_x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   Comme $\det(W(x)) = \omega(x) \neq 0$, la matrice $W(x)$ est inversible et $W(x)^{-1} = \dfrac{1}{w(x)} \begin{pmatrix} g'(x) & -g(x)\\ -f'(x) & f(x)\end{pmatrix}$

   Conclusion : $\begin{pmatrix} \lambda_x\\ \mu_x\end{pmatrix} = W(x)^{-1} \begin{pmatrix} y(x)\\ y'(x)\end{pmatrix}$,

   CàD λ_x, μ_x s'exprime à l'aide de fonction $\mathscr{C}^\infty$ donc λ_x, μ_x sont $\mathscr{C}^\infty$

(c) Montrer que $\forall\ x,\ \lambda'(x) = 0$ et $\mu'(x) = 0$

On dérive l'égalité $\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \lambda_x \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$

Ainsi on a : $\begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \lambda'_x \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} + \lambda_x \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \end{pmatrix} + \mu'_x \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g'(x) \\ g''(x) \end{pmatrix}$

$>$ On utilise $y'' = -ay' - by$ et $f'' = -af' - bf$ et $g'' = -ag' - bg$, ainsi

$$\begin{pmatrix} y' \\ -ay' - by \end{pmatrix} = \lambda'_x \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \lambda_x \begin{pmatrix} f' \\ -af' - bf \end{pmatrix} + \mu'_x \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g' \\ -ag' - bg \end{pmatrix}$$

$>$ Or on sait que : $y = \lambda_x f + \mu_x g$ et $y' = \lambda_x f' + \mu_x g'$, donc il reste

$$\begin{pmatrix} y' \\ O \end{pmatrix} = \lambda'_x \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \lambda_x \begin{pmatrix} f' \\ O \end{pmatrix} + \mu'_x \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g' \\ O \end{pmatrix}$$

$>$ Or on sait que : $y' = \lambda_x f' + \mu_x g'$, donc il reste

$$\begin{pmatrix} O \\ O \end{pmatrix} = \lambda'_x \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \lambda_x \begin{pmatrix} O \\ O \end{pmatrix} + \mu'_x \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} O \\ O \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\lambda'_x \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \mu'_x \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O \\ O \end{pmatrix}$ et la famille $\left(\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} \right)$ est libre

Ainsi $\lambda'_x = \mu'_x = 0$

4. Conclusion

(a) Déduire des calculs précédent que $y = CL\,(f, g)$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = 0$ on a que : λ est une constante, CàD $\lambda_x = \lambda$.

De même μ est une constante, CàD $\mu_x = \mu$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda f(x) + \mu\, g(x)$, CàD $y = \lambda f + \mu\, g = CL\,(f, g)$.

(b) Montrer que (f, g) est une base de $\mathbb{S}$ et ainsi $\dim \mathbb{S} = cardinal$ (base) $= 2$

Conclusion : la famille (f, g) libre (car $\neq 0$ et non $//$) dans $\mathbb{S}$ et génératrice

Donc c'est une base de $\mathbb{S}$ et ainsi $\dim \mathbb{S} = cardinal$ (base) $= 2$