TD 17 Algèbre linéaire.

Mercredi 04 Février 2026.

Page 1

Exercice 1. [Correction] On considère la fonction ϕ définie par

$$\forall \overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \phi(\overrightarrow{u}) = (2x-3y+3z\ ,\ 3x-4y+3z\ ,\ 3x-3y+2z)$$

On note id la fonction identité de $\mathbb{R}^3$ et on a $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3,\ id(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$

1. Justifier que $\phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, CàD que f est en endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère $F = \ker(\phi - 2id)$.

   Vérifier que F est une droite vectorielle et déterminer une base $\mathscr{B}_F = \left\{\overrightarrow{f}\right\}$ de F.

   Calculer, en fonction de $\overrightarrow{f}$, les vecteurs $\phi\left(\overrightarrow{f}\right)$, de $\phi^2\left(\overrightarrow{f}\right) = [\phi\circ\phi]\left(\overrightarrow{f}\right)$, $\phi^3\left(\overrightarrow{f}\right) = [\phi\circ\phi\circ\phi]\left(\overrightarrow{f}\right)$
3. On considère $G = \ker(\phi + id)$.

   Vérifier que G est un plan vectoriel et déterminer une base $\mathscr{B}_G = \left\{\overrightarrow{g}, \overrightarrow{g'}\right\}$ de G.

   Calculer, en fonction de $\overrightarrow{g}$, les vecteurs $\phi(\overrightarrow{g})$, de $\phi^2(\overrightarrow{g}) = [\phi\circ\phi](\overrightarrow{g})$, $\phi^3(\overrightarrow{g}) = [\phi\circ\phi\circ\phi](\overrightarrow{g})$
4. On considère $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$.
   (a) Vérifier que $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$. En déduire une méthode pour calculer de $\phi(\overrightarrow{u})$, de $\phi^2(\overrightarrow{u}) = [\phi\circ\phi](\overrightarrow{u})$, $\phi^3(\overrightarrow{u}) = [\phi\circ\phi\circ\phi](\overrightarrow{u})$ et plus généralement de $\phi^n(\overrightarrow{u})$.

Exercice 2. On considère la fonction f de $\mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad f(P) = (X-1)P'(X) - 3P(X)$$

1. Montrer que f est linéaire et que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer $\ker f$, CàD une base et la dimension de $\ker f$.
3. Déterminer $\mathrm{Im} f$.
4. Application : Résoudre, sur $I =]1, +\infty[$, l'équation différentielle $(x-1)y' - 3y = x^2 + x - 2$

Théorique mais simple.

Exercice 3. [Correction] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose que f et g commutent , CàD $f \circ g = g \circ f$.

Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g

Exercice 4. [Correction] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.
On considère la fonction f définie par

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + tr(M)A$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}\Big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\Big)$.
2. On va déterminer $Ker(f)$
   (a) Montrer que : $\ker(f) \subset vect(A)$
   (b) Étudier si $vect(A) \subset \ker(f)$ et conclure que

   Si $tr(A) = -1$ alors $\ker(f) = vect(A)$.
   Si $tr(A) \neq -1$ alors $\ker(f) = \{0\}$.
3. En utilisant le théorème du rang, montrer que la fonction est surjective.
4. On suppose que $tr(A) \neq -1$.

   Montrer que $\forall\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que : $C + tr(C)A = B$.

Exercice 5. [Correction] On considère les fonctions f et g

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = P' \ et\ g(P) = XP.$$

1. Montrer (admettre ?) que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ et calculer $f \circ g - g \circ f$
2. Étudier l'injectivité de f et de g.
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f \circ g^n - g^n \circ f = n\, g^{n-1}$.
   Rappel : $g^n = g \circ g \circ \cdots \circ g$.

Classique et Théorique et plus difficile.

Exercice 6. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ On suppose que :$\forall\, \overrightarrow{x} \in E,\ f\left(\overrightarrow{x}\right) = \lambda_x \overrightarrow{x}$
Montrer que : $\lambda_x = \lambda$ ne dépend pas de $\overrightarrow{x}$.

Classique.

Exercice 7. [Correction] Soit E un espace vectoriel.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, un endomorphisme de E. On note $u^p = u \circ \cdots \circ u$
On définit

les noyaux itérés $K_p = \ker\left(u^p\right)$ et on note $d_p = \dim\left(K_p\right) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
Les images itérées $I_p = \operatorname{Im}\left(u^p\right)$

1. *Les noyaux grandissent.* Montrer que : $K_p \subset K_{p+1}$.
2. *Stabilisation.* Montrer que : $K_p = K_{p+1} \implies K_{p+1} = K_{p+2}$
3. *Indice de stabilisation.* On note r, le plus petit indice (si il existe) tel que $K_r = K_{r+1}$

   On a donc $K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq \cdots \subsetneq K_r = K_{r+1} = K_{r+2} = \cdots$

   Montrer que : $I_r \cap K_r = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
4. *Mimétisme* Montrer que :

$$\left.\begin{array}{r} K_p = K_{p+1} \\ \\ I_{p+1} = I_{p+2} \end{array}\right\} \implies I_p = I_{p+1}$$

   Justifier que : Si les noyaux et les images s'arrêtent alors ils s'arrêtent en même temps