

Exercice 1. [Correction] Soit $n \geq 2$ fixé.

On s'intéresse dans ce problème à des puissances de matrices symétriques.

On rappelle que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

est l'ensemble des matrices M de taille $n \times n$ et vérifiant $M^T = M$

1. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: $\text{tr}(M^2) = \text{tr}(M^T \cdot M) \geq 0$ et que $\text{tr}(M^2) = 0 \iff M = \mathcal{O}_n$.

Le résultat servira plusieurs fois par la suite !

2. Montrer que : pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $M^k \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\mathcal{O}_n$ est la seule matrice nilpotente de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On s'intéresse désormais aux matrices symétriques dont une puissance est la matrice identité.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{U}_p = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid M^p = I_n\}$, puis $\mathcal{U} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \mathcal{U}_p$.

3. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1

On note pose $M(a, b) = aI_n + bJ$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Enfin $\mathcal{M} = \{M(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

- (a) Montrer, **SANS récurrence**, que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$: $M(a, b)^p = M\left(a^p, \frac{(a + nb)^p - a^p}{n}\right)$.

On remarquera que $J^2 = nJ$

- (b) En déduire que pour tout $M \in \mathcal{M} \cap \mathcal{U}$: $M^2 = I_n$.

4. Soit $M \in \mathcal{U}_4$. Simplifier $(M^2 - I_n)^2$ et $(M^3 - M)^2$, puis montrer que $M^2 = I_n$.

5. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ impair et $M \in \mathcal{U}_p$. On pose $S = \sum_{k=0}^{p-1} M^k$.

- (a) Montrer que $S^2 = pS$.

- (b) Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on note r_k le reste de la division euclidienne de $2k$ par p .

Montrer que la fonction $k \mapsto r_k$ est bijective de $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ sur lui-même.

- (c) En déduire que $\sum_{0 \leq i, j \leq p-1} (M^j - M^i)^2 = 0$, puis que $M = I_n$.

Ce résultat est très spécifique aux matrices symétriques.

Par exemple, pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on vérifie facilement que $M^3 = I_3$, mais $M \neq I_3$.

6. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{U}$: $M^2 = I_n$.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) : \text{tr}(M^2) = \text{tr}(M^T.M) \geq 0$ et que $\text{tr}(M^2) = 0 \iff M = \mathcal{O}_n$.

On note $M = (M_{i,j})$

On a "facilement" que $\text{tr}(M^T.M) = \sum_{\text{tous les } i, j} m_{i,j}^2 \geq 0$

ET $\text{tr}(M^T.M) = \sum_{\text{tous les } i, j} m_{i,j}^2 = 0 \iff \forall i, j, m_{i,j} = 0 \iff M = \mathcal{O}_n$

car une somme de carré (dans $\mathbb{R}$) est égale à 0 Ssi

2. Montrer que : pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $M^k \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $M^T = M$. De plus la transposition est contra-variante, CàD $(AB)^T = B^T.A^T$

On a donc $(M^k)^T = (M.M...M)^T = M^T.M^T...M^T = M^k$, CàD $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Montrer que $\mathcal{O}_n$ est la seule matrice nilpotente de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On fait un RA. On suppose que $N \neq \mathcal{O}$ est nilpotente et symétrique

Je note α l'indice de nilpotence, CàD $N^{\alpha-1} \neq \mathcal{O}$ et $N^\alpha = \mathcal{O}$

comme $N \neq \mathcal{O}$, on a $\alpha \geq 2$

Comme N est symétrique, on sait que $N^{\alpha-1}$ est aussi symétrique.

Ainsi $N^{\alpha-1}$ est symétrique et $\neq \mathcal{O}$ donc $\text{tr}(N^{\alpha-1})^2 > 0$.

MAIS $(N^{\alpha-1})^2 = N^{2\alpha-2} = \mathcal{O}$ car $2\alpha-2 \geq 2$ en effet $(2\alpha-2) - 2 = 2(\alpha-2) \geq 0$

Conclusion : $\text{tr}(N^{\alpha-1})^2 = 0$ OUPS

On s'intéresse désormais aux matrices symétriques dont une puissance est la matrice identité.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{U}_p = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid M^p = I_n\}$, puis $\mathcal{U} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \mathcal{U}_p$.

3. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1

On note pose $M(a, b) = aI_n + bJ$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Enfin $\mathcal{M} = \{M(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

(a) Montrer, **SANS récurrence**, que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$: $M(a, b)^p = M\left(a^p, \frac{(a+nb)^p - a^p}{n}\right)$.

On a $J^2 = nJ$ et plus généralement $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = n^{k-1}J$

On a maintenant $M(a, b)^p = (aI_n + bJ)^p$

$$= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^{n-k} b^k J^k$$

$$= \underbrace{a^p I}_{k=0} + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} a^{n-k} b^k n^{k-1} J$$

$$a^p I + \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} a^{n-k} b^k n^k \right] J$$

$$= a^p I + \frac{1}{n} \left[(a+nb)^p - \underbrace{a^p}_{k=0} \right] J$$

(b) En déduire que pour tout $M \in \mathcal{M} \cap \mathcal{U}$: $M^2 = I_n$.

On suppose $M \in \mathcal{M} \cap \mathcal{U}$, CàD $M = M(a, b)$ et il existe p tel que $M \in \mathcal{U}_p$, CàD $M^p = I$

On va montrer que $M^2 = I$

Comme $M^p = M(a, b)^p = a^p I + \frac{(a+nb)^p - a^p}{n} J$

Donc forcément $a^p = 1 \implies a = \pm 1$ et $(a+nb)^p - a^p = 0 \iff (a+nb)^p = 1$

> Si p impair alors $a = 1$ et $a+nb = 1$ donc $b = 0$, CàD $M = I$ et $M^2 = I$

> Si p pair alors $a = \pm 1$ et $a+nb = \pm 1$ donc $a^2 = 1$ et $(a+nb)^2 = 1$

$$\text{Donc } M^2 = M(a, b)^2 = a^2 I + \frac{(a+nb)^2 - a^2}{n} J = 1 I + \frac{1-1}{n} J = I$$

4. Soit $M \in \mathcal{U}_4$. Simplifier $(M^2 - I_n)^2$ et $(M^3 - M)^2$, puis montrer que $M^2 = I_n$.

Comme $M \in \mathcal{U}_4$, on sait que $M^4 = I$

On a $(M^2 - I_n)^2 = M^4 - 2M^2 + I = 2I - 2M^2$ et $(M^3 - M)^2 = M^6 - 2M^4 + M^2 = 2M^2 - 2I$

On regarde la trace.

Comme les matrices sont symétriques, la question Q1 assure que $\text{tr}(2I - 2M^2) \geq 0$ et $\text{tr}(2M^2 - 2I) \geq 0$

Donc $\text{tr}(2I - 2M^2) = 0$ et $2I - 2M^2$ est symétrique donc $I - M^2 = 0$

On a démontré que. Soit M est symétrique : on a alors $M^4 = I \iff (M^2)^2 = I \implies M^2 = I$.

CàD $\square$ est une matrice symétrique et $(\square^2)^2 = I$ alors $\square^2 = 0$

5. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ impair et $M \in \mathcal{U}_p$. On pose $S = \sum_{k=0}^{p-1} M^k$.

(a) Montrer que $S^2 = pS$.

On a $S^2 = S + MS + M^2S + \dots + M^{p-1}S$

On remarque $M.S = \sum_{k=1}^p M^k = \sum_{k=1}^{p-1} M^k + \underbrace{M^p}_{=I} = S$

Puis que $M^2S = M(MS) = MS = S$ etc

(b) Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on note r_k le reste de la division euclidienne de $2k$ par p .

Montrer que la fonction $k \mapsto r_k$ est bijective de $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ sur lui-même.

On fait injective avec Gauss

sachant que p premier impair est avec 2 et $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ donc avec $2k$

Comme la fonction est injective et cardinal Départ=cardinal arrivé, on a surjective

(c) En déduire que $\sum_{0 \leq i, j \leq p-1} (M^j - M^i)^2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{0 \leq i, j \leq p-1} (M^j - M^i)^2 &= \sum_{0 \leq i, j \leq p-1} (M^{2j} - 2M^{i+j} + M^{2i}) \\ &= 2 \sum_{0 \leq i, j \leq p-1} M^{2j} - 2 \sum_{0 \leq i, j \leq p-1} M^{i+j} \\ &= 2p \sum_{0 \leq j \leq p-1} M^{2j} - 2 \left(\sum_{0 \leq i \leq p-1} M^i \right) \left(\sum_{0 \leq j \leq p-1} M^j \right) \\ &= 2p \sum_{0 \leq j \leq p-1} M^{r_j} - 2.S.S \\ &= 2p \sum_{0 \leq j \leq p-1} M^j - 2.S.S \\ &= 2pS - 2S^2 = \mathcal{O} \end{aligned}$$

Puis que $M = I_n$.

On utilise la trace et Q1 ainsi $\forall i, j, M^j - M^i = \mathcal{O}$

Avec $i = 0$ et $j = 1$, on a $M - I = \mathcal{O}$

6. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{U} : M^2 = I_n$.

Comme $M \in \mathcal{U}$, on sait que il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $U^p = 0$

Comme $M \in \mathcal{U}_p$ et on écrit $p = 2^\alpha \cdot \text{impair}$ alors $(M^{2^\alpha})^{\text{impair}} = I$

donc $M^{2^\alpha} = I$ d'après Q5c

On utilise Q4 pour conclure que

$$\begin{aligned} M^{2^\alpha} &= (M^{2^{\alpha-1}})^2 = I \implies M^{2^{\alpha-1}} = I \\ &\implies M^{2^{\alpha-2}} = I \end{aligned}$$

$$\implies M^2 = I$$