

Exercice 1. [Correction] On considère la fonction ϕ définie par

$$\forall \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \phi(\vec{u}) = (2x - 3y + 3z, 3x - 4y + 3z, 3x - 3y + 2z)$$

On note id la fonction identité de $\mathbb{R}^3$ et on a $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, id(\vec{u}) = \vec{u}$

1. Justifier que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, CàD que ϕ est en endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère $F = \ker(\phi - 2id)$.

Vérifier que F est une droite vectorielle et déterminer une base $\mathcal{B}_F = \{\vec{f}\}$ de F .

Calculer, en fonction de $\vec{f}$, les vecteurs $\phi(\vec{f})$, de $\phi^2(\vec{f}) = [\phi \circ \phi](\vec{f})$, $\phi^3(\vec{f}) = [\phi \circ \phi \circ \phi](\vec{f})$

3. On considère $G = \ker(\phi + id)$.

Vérifier que G est un plan vectoriel et déterminer une base $\mathcal{B}_G = \{\vec{g}, \vec{g}'\}$ de G .

Calculer, en fonction de $\vec{g}$, les vecteurs $\phi(\vec{g})$, de $\phi^2(\vec{g}) = [\phi \circ \phi](\vec{g})$, $\phi^3(\vec{g}) = [\phi \circ \phi \circ \phi](\vec{g})$

4. On considère $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$.

(a) Vérifier que $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. En déduire une méthode pour calculer de $\phi(\vec{u})$, de $\phi^2(\vec{u}) = [\phi \circ \phi](\vec{u})$, $\phi^3(\vec{u}) = [\phi \circ \phi \circ \phi](\vec{u})$ et plus généralement de $\phi^n(\vec{u})$.

Exercice 2. On considère la fonction f de $\mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = (X - 1)P'(X) - 3P(X)$$

1. Montrer que f est linéaire et que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer $\ker f$, CàD une base et la dimension de $\ker f$.
3. Déterminer $\text{Im} f$.
4. Application : Résoudre, sur $I =]1, +\infty[$, l'équation différentielle $(x - 1)y' - 3y = x^2 + x - 2$

Théorique mais simple.

Exercice 3. [Correction] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que f et g commutent, CàD $f \circ g = g \circ f$.

Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g

Exercice 4. [Correction] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.
On considère la fonction f définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + \operatorname{tr}(M)A$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
2. On va déterminer $\operatorname{Ker}(f)$
 - (a) Montrer que : $\operatorname{ker}(f) \subset \operatorname{vect}(A)$
 - (b) Étudier si $\operatorname{vect}(A) \subset \operatorname{ker}(f)$ et conclure que
Si $\operatorname{tr}(A) = -1$ alors $\operatorname{ker}(f) = \operatorname{vect}(A)$.
Si $\operatorname{tr}(A) \neq -1$ alors $\operatorname{ker}(f) = \{0\}$.
3. En utilisant le théorème du rang, montrer que la fonction est surjective.
4. On suppose que $\operatorname{tr}(A) \neq -1$.

Montrer que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que : $C + \operatorname{tr}(C)A = B$.

Exercice 5. [Correction] On considère les fonctions f et g

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = P' \text{ et } g(P) = XP.$$

1. Montrer (admettre ?) que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ et calculer $f \circ g - g \circ f$
2. Étudier l'injectivité de f et de g .
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}$.
Rappel : $g^n = g \circ g \circ \dots \circ g$.

Classique et Théorique et plus difficile.

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ On suppose que : $\forall \vec{x} \in E, \quad f(\vec{x}) = \lambda_x \vec{x}$

Montrer que : $\lambda_x = \lambda$ ne dépend pas de $\vec{x}$.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On a

$$\phi(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 2x - 3y + 3z \\ 3x - 4y + 3z \\ 3x - 3y + 2z \end{pmatrix} = A\vec{u}$$

Ainsi la fonction ϕ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, car $\phi(\vec{u}) = A\vec{u}$ est le produit par une matrice fixe.

2. On a

$$\vec{u} \in F \iff [\phi - 2id](\vec{u}) = \vec{0}$$

$$\iff \phi(\vec{u}) - 2id(\vec{u}) = \vec{0}$$

$$\iff A\vec{u} - 2\vec{u} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{cases} 0x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 6y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 0z = 0 \end{cases}$$

On résout le système et on trouve que $\vec{f} = (1, 1, 1)$ est une base $\ker(\phi - 2id)$ et donc que $\dim \ker(\phi - 2id) = \text{card}(\text{Base}) = 2$.

$$\text{De plus } \vec{f} \mapsto \phi(\vec{f}) = 2\vec{f} \mapsto \phi \circ \phi(\vec{f}) = \phi(2\vec{f}) = 2.2\vec{f} \mapsto 2.2.2\vec{f}$$

3. On procède de même et on trouve que $\vec{g}_1 = (1, -1, 0)$ et $\vec{g}_2 = (1, 0, -1)$ forment une base $\ker(\phi + id)$ et donc que $\dim \ker(\phi + id) = \text{card}(\text{Base}) = 2$.

4. On note $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G = \{\vec{f}, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$

(a) $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$?

$$\text{la famille } \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ est libre car } \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \det \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \dots = 3 \neq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ainsi } \mathcal{B} \text{ est une famille libre de } E \\ \text{card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \end{array} \right\} \implies \mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

(b) Comme le vecteur $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire $\vec{u} = \alpha \vec{f} + \beta \vec{g}_1 + \gamma \vec{g}_2$, ainsi

$$\begin{aligned} \phi(\vec{u}) &= \phi(\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}_1 + \gamma \vec{g}_2) \\ &= \alpha \phi(\vec{f}) + \beta \phi(\vec{g}_1) + \gamma \phi(\vec{g}_2) = \alpha 2\vec{f} + \beta(-1)\vec{g}_1 + \gamma(-1)\vec{g}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^2(\vec{u}) &= \phi^2(\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}_1 + \gamma \vec{g}_2) \\ &= \alpha \phi^2(\vec{f}) + \beta \phi^2(\vec{g}_1) + \gamma \phi^2(\vec{g}_2) = \alpha 2^2 \vec{f} + \beta(-1)^2 \vec{g}_1 + \gamma(-1)^2 \vec{g}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^n(\vec{u}) &= \phi^n(\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}_1 + \gamma \vec{g}_2) \\ &= \alpha \phi^n(\vec{f}) + \beta \phi^n(\vec{g}_1) + \gamma \phi^n(\vec{g}_2) = \alpha 2^n \vec{f} + \beta(-1)^n \vec{g}_1 + \gamma(-1)^n \vec{g}_2 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

$\ker(f)$ est stable par g ?

On suppose que $\vec{u} \in \ker(f)$

On va montrer que : $g(\vec{u}) \in \ker(f)$, CàD $f(g(\vec{u})) = \vec{0}$

$$\text{On a } f(g(\vec{u})) = f \circ g(\vec{u}) = g \circ f(\vec{u}) = g(f(\vec{u})) = g(\vec{0}) = \vec{0}$$

$\text{Im}(f)$ est stable par g ?

On suppose que $\vec{u} \in \text{Im}(f)$, CàD $\vec{u} = f(\vec{v})$

On va montrer que : $g(\vec{u}) \in \text{Im}(f)$, CàD $g(\vec{u}) = f(\overrightarrow{\text{Truc}})$

$$\text{On a } g(\vec{u}) = g(f(\vec{a})) = g \circ f(\vec{a}) = f \circ g(\vec{a}) = f(\vec{b}) \text{ avec } \vec{b} = g(\vec{a})$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On considère la fonction f définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + \text{tr}(M)A$$

1. Comme $M, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il est clair que f est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Linéaire ?

> On a $f(0) = 0 + \text{tr}(0)A = 0$,

Donc f conserve le vecteur nul.

> Conserve les CL ? On a

$$f(\lambda M + \mu M') = (\lambda M + \mu M') + \text{tr}(\lambda M + \mu M')A$$

$$\text{Or on sait que : } \text{tr}(\lambda M + \mu M') = \lambda \text{tr}(M) + \mu \text{tr}(M')$$

Finir les calculs.

2. On va déterminer $\text{Ker}(f)$

(a) On va démontrer $\text{ker}(f) \subset \text{Vect}(A)$ avec la définition.

On suppose que $M \in \text{ker}(f)$

On va montrer que : $M \in \text{Vect}(A)$

Comme $M \in \text{ker}(f)$, on a $f(M) = M + \text{tr}(M)A = 0$.

$$\text{Ainsi } M = -\text{tr}(M)A \in \text{Vect}(A) \text{ car } -\text{tr}(M) \in \mathbb{R} \text{ est un scalaire.}$$

(b) On suppose que $M \in \text{Vect}(A)$.

On va calculer $f(M)$

Comme $M \in \text{Vect}(A)$, on a $M = \lambda A$, ainsi

$$f(M) = (\lambda A) + \text{tr}(\lambda A)A = \lambda [1 + \text{tr}(A)]A$$

> Si $\text{tr}(A) = -1$ alors $f(M) = 0$ donc $\text{Vect}(A) \subset \text{ker}(f)$ et donc $\text{ker}(f) = \text{Vect}(A)$.

> Si $\text{tr}(A) \neq -1$ alors $\lambda = 0$ et donc $\text{ker}(f) = \{0\}$.

3. On suppose que $\text{tr}(A) \neq -1$.

On vient de voir que $\text{ker}(f) = \{\vec{0}\}$ la fonction f est injective.

Ainsi f est un endomorphisme, injectif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2 < \infty$

Donc f est bijectif, c'est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $\forall B \in \mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $f(M) = B$ admet une unique solution notée C

Conclusion : $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $C + \text{tr}(C)A = B$.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. La dérivation est linéaire car donc f est linéaire.

La multiplication par X fixe est linéaire donc g est linéaire.

De plus f et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$

Donc $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.

De plus $\forall P \in \mathbb{R}[X], [f \circ g - g \circ f](P) = \dots = P = [id](P),$

Conclusion : $f \circ g - g \circ f = id.$

2. Étude l'injectivité de f .

$$P \in \ker(f) \iff f(P) = 0$$

$$\iff P' = 0$$

On primitive.

$$\iff P = 0 + k$$

$$\iff P = k[X^0]$$

Donc $\ker(f) = \text{vect}(X^0) = \mathbb{R}_0[X].$

Donc la fonction f n'est pas injective.

Rappel : $\mathbb{R}_0[X]$ c'est l'ensemble des polynôme de degré ≤ 0 , CàD les polynômes constants.

3. Étude de l'injectivité de g .

$$P \in \ker(g) \iff g(P) = 0$$

$$\iff X.P = 0$$

$$\iff \text{Le polynôme } X \text{ est nul } \textbf{ou bien} \text{ le polynôme } P \text{ est nul}$$

$$\iff P = 0 \quad \text{Car } X \text{ n'est pas le polynôme nul}$$

Donc $\ker(g) = \{ \vec{0} \}.$

Donc la fonction g est injective.

4. On a facilement $[g^n](P) = [g \circ g \circ \dots \circ g](P) = X^n P$

Ainsi $\forall P \in \mathbb{R}[X], [f \circ g^n - g^n \circ f](P) = \dots = n X^{n-1} P = [ng^{n-1}](P)$