

Somme, endo, Symétrie, Hyperplan.

1 Somme de ssev.	1	3 Projecteur-Symétrie.	4
1.1 Somme et somme directe de 2 ssev.	1	3.1 Les ssev $\ker(\phi - \lambda id)$	4
1.2 Ssev supplémentaires.	2	3.2 Projecteur-Projection	4
2 Droite, Hyperplan et Forme linéaire.	3	3.3 Symétrie(seur)-Symétrie(sion)	4
		4 Exercices	5

1 Somme de ssev.

1.1 Somme et somme directe de 2 ssev.

Définition 1. Somme de 2 ssev

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G deux ssev de E .

La somme $(F + G)$, c'est l'ensemble définie par

$$F + G = \left\{ \vec{u} \in E \text{ tel que : Il existe } (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G \text{ avec } \vec{u} = \vec{f} + \vec{g} \right\}$$

$$\text{On a donc : } \vec{u} \in F + G \iff \begin{cases} \text{Il existe un couple } (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G \\ \text{tq } \vec{u} = \vec{f} + \vec{g} \end{cases}$$

On dit que la somme est directe, notée $F \oplus G$, Ssi la décomposition $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$ est unique

$$\text{On a donc } \vec{u} \in F \oplus G \iff \begin{cases} \text{Il existe un } \textbf{unique} \text{ couple } (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G \\ \text{tq } \vec{u} = \vec{f} + \vec{g} \end{cases}$$

Théorème 2. Propriétés de $F + G$

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G deux ssev de E . On a

> **Piège** le "+" de $F + G$ n'est pas une addition,

$$\text{Ainsi } F + G = F + G' \not\Rightarrow G = (F + G') - F = G'$$

> **Définition.** Lorsque $\vec{u} \in F + G$,

$$\text{on peut écrire } \vec{u} = \vec{f} + \vec{g} \text{ avec } \vec{f} \in F \text{ et } \vec{g} \in G$$

> **Propriétés évidentes.** $F + G$ est un ssev de E et $F \subset (F + G)$ et $G \subset (F + G)$

Ainsi $(F + G)$ est un ssev strictement en général plus gros que F et G .

$$\text{Et on a : } F + \{\vec{0}\} = F \text{ et } F + F = F \text{ et } F + E = E$$

> **Optimalité.** $F + G$ est le plus petit ssev contenant F et G , CàD

$$\left. \begin{array}{l} H \text{ est un ssev} \\ F \subset H \text{ et } G \subset H \end{array} \right\} \implies F + G \subset H$$

> **Famille génératrice.** Soit les bases $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ et $\mathcal{B}_G = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$,

Alors $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une famille génératrice de $F + G$,

$$\text{CàD } F + G = \text{vect}(\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G) = \text{vect}(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$$

> **Formule de Grassmann.**

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

1.2 Ssev supplémentaires.

Définition 3. Somme de 2 ssev

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G deux ssev de E .

On dit que la somme F et G sont 2 ssev supplémentaires de E Ssi $E = F \oplus G$

Théorème 4. Supplémentaire et Base

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G sont deux ssev.

Soit $\mathcal{B}_F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_p\}$ une base de F et $\mathcal{B}_G = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_q\}$ une base de G

On a équivalence

(i) F et G sont deux ssev supplémentaires, noté $F \oplus G = E$.

(ii) $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $F + G = E$.

(iii) $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E .

Remarque : Ce théorème est valide même si $\dim E = \infty$.

Démonstration : On fait : $(F \cap G) = \{\vec{0}\} \iff$ unicité de (i)

$(F \cap G) = \{\vec{0}\} \implies$ unicité de (i)?

On suppose $\vec{u} = f + g = f' + g'$.

on va montrer que $f = f'$ et $g = g'$

On a $f + g = f' + g'$ donc $A = f - f' = g' - g \in (F \cap G)$

Donc $\forall A = \vec{0}$ et on a bien $f = f'$ et $g = g'$.

unicité de (i) $\implies (F \cap G) = \{\vec{0}\}$?

On suppose $\vec{u} \in (F \cap G)$. on va montrer que $\vec{u} = \vec{0}$

On a $u = \underbrace{u}_F + \underbrace{0}_G = \underbrace{0}_F + \underbrace{u}_G$

À cause de l'unicité de la décomposition, on a bien $\vec{u} = 0$

Démonstration : On fait : (ii) $\implies$ (iii) et (iii) $\implies$ (ii)

(ii) $\implies$ (iii)? Pour vérifier que $\mathcal{B}$ est une base, on fait libre + card + dim

> La famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_q\}$ est libre?

On suppose que : $\lambda_1 \vec{f}_1 + \dots + \lambda_p \vec{f}_p + \mu_1 \vec{g}_1 + \dots + \mu_q \vec{g}_q = \vec{0}$

donc $\vec{A} = \lambda_1 \vec{f}_1 + \dots + \lambda_p \vec{f}_p = -\mu_1 \vec{g}_1 - \dots - \mu_q \vec{g}_q \in (F \cap G)$

Donc $\vec{A} = 0$

Conclusion : $\lambda_1 \vec{f}_1 + \dots + \lambda_p \vec{f}_p = 0$ et $\mathcal{B}_F$ est libre (car c'est une base de F)

Yes on a bien $\lambda_1 \vec{f}_1 = \dots = \lambda_p = 0$ (on fait de même avec les μ).

> De plus $\text{card}(\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G) = p + q$.

> Avec Grassmann, on a $\dim E = \dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

$$= p + q - 0$$

Conclusion

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G \text{ est une famille libre et dans } E \\ \text{card}(\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G) = p + q \\ \dim E = p + q \end{array} \right\} \implies \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G \text{ est une base de } E$$

Remarque : Si $\dim = \infty$, on faut remplacer card=dim

et démontrer/utiliser que $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est génératrice. (voir théorème 2)

(iii) $\implies$ (ii)?

On démontre que $(F \cap G) = \{\vec{0}\}$.

Puis avec Grassmann, on déduit $\dim(F + G) = p + q$. Ainsi $(F + G)$ est un ssev de E et dimension topissime donc $(F + G) = E$

Remarque : Si $\dim = \infty$, on faut remplacer $(F + G)$ est un ssev de E et dimension topissime

et démontrer directement avec la définition que $(F + G) = E$

Théorème 5. Existence-Unicité-Dimension des supplémentaires

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et F un ssev de E .

On a alors

- > Il existe un (ou plusieurs) supplémentaire,
CàD il existe un ssev G tel que $F \oplus G = E$.
- > Les supplémentaires de F sont non-unique,
CàD $F \oplus G = F \oplus G' \not\Rightarrow G = G'$.
- > Tous les supplémentaires de F ont la même dimension
CàD $\dim(G) = \dim(G') = \dim(E) - \dim(F)$.

Remarque : Les résultats sont valides même lorsque $\dim E = \infty$.

Démonstration : Pour fabriquer un supplémentaire pour F , il "suffit" de prendre une base $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ de F et de la compléter (grâce au théorème de la base incomplète) en une base de E , ainsi $\mathcal{B} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p, \vec{e}_{p+1}, \dots)$ est une base de E .

Grâce au théorème précédent, on a que $G = \text{vect}(\vec{e}_{p+1}, \dots)$ est un supplémentaire de F .

Comme $E = F \oplus G$, on a avec Grassmann $\dim G = \dim(E) - \dim(F)$.

2 Droite, Hyperplan et Forme linéaire.

Définition 6. Droite-Hyperplan-Forme linéaire

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n .

- > Une droite vectorielle D de E est un ssev de dimension 1.
- > Un hyperplan H de E est un ssev de dimension $\text{Top} - 1 = n - 1$
- > On dit que ϕ est une *forme linéaire*
Ssi ϕ est un morphisme de E à valeurs dans $\mathbb{R}$, CàD $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

Théorème 7. Résultats classiques et utiles

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n .

- > On suppose que : F est un ssev et $F \subset D_{\text{droite}}$
Alors $\dim F \leq 1$, CàD $\dim F = 0$ ou $\dim F = 1$.
Conclusion $F = \{\vec{0}\}$ ou $F = D$
- > Si F est un ssev et $H_{\text{hyperplan}} \subset F$
Alors $\dim F \geq \text{Top} - 1$, CàD $\dim F = \text{Top} - 1$ ou $\dim F = \text{Top}$.
Conclusion $F = H$ ou $F = E$
- > Application 1 : On suppose que : H un hyperplan et $\vec{a} \notin H$
Alors $H \oplus \text{vect}(\vec{a}) = E$
Ceci n'est pas un résultat de cours, il faut le redémontrer, voir démo ci-dessous
- > Application 2 : On suppose que $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire non nulle
Alors $\text{Im } \phi = \mathbb{R}$ et $H = \ker(\phi)$ est un hyperplan de E

Ceci est un résultat de cours, on peut l'utiliser. Démo ci-dessous

Démonstration Application 1. On considère $\mathcal{H} = H + \text{vect}(\vec{a})$.

> $\mathcal{H}$ est un ssev qui contient l'hyperplan H et qui n'est pas égale à H (car $\vec{a} \in \mathcal{H}$ et $\vec{a} \notin H$)

Donc $H + \text{vect}(\vec{a}) = \mathcal{H} = E$

> Avec Grassmann, on a $\dim(H \cap \text{vect}(\vec{a})) = 0$ donc $H \cap \text{vect}(\vec{a}) = \{\vec{0}\}$ Fini

Démonstration Application 2. On suppose que $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire non nulle

> Comme ϕ est une forme linéaire, on sait que $\text{Im}(\phi)$ est un ssev de $\mathcal{A}_{\text{triv}} = \mathbb{R}^1$.

Donc $\text{Im}(\phi) = \{\vec{0}\}$ ou $\text{Im}(\phi) = \mathbb{R}$.

> Comme ϕ n'est pas la fonction nulle, on a $\text{Im}(\phi) = \mathbb{R}$.

> Avec le thm du rang, on a : $\dim(\ker \phi) = \text{Top} - 1$, CàD $\ker \phi$ est un hyperplan.

3 Projecteur-Symétrie.

3.1 Les ssev $\ker(\phi - \lambda id)$

On suppose que $\vec{u} \in \ker(\phi - \lambda id) \implies$ on a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \\ \phi^2(\vec{u}) = \phi \circ \phi(\vec{u}) = \dots = \lambda^2 \vec{u} \\ \phi^3(\vec{u}) = \phi \circ \phi \circ \phi(\vec{u}) = \dots = \lambda^3 \vec{u} \\ [\phi^2 - \phi + 2id](\vec{u}) = \dots = [\lambda^2 - \lambda + 2] \vec{u} \end{array} \right.$$

3.2 Projecteur-Projection

Définition 8. Projecteur-Projection

Projecteur

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectorielle et $p \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que p est un *projecteur* de E

Ssi p est linéaire et $p \circ p = p$.

Projection

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectorielle

et F, G des ssev supplémentaires, CàD avec $F \oplus G = E$.

Pour tout $\vec{u} \in E$, on a $\vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$

La *projection* p sur F et parallèlement à G est la fonction définie par

$$\forall \vec{u} \in E, \vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G \longmapsto p(\vec{u}) = \vec{u}_F$$

Théorème 9. Projection $\leftrightarrow$ Projecteur

> On suppose que p est un projecteur, CàD p est linéaire et $p \circ p = p$

On a alors $E = \ker(p - id) \oplus \ker(p)$

On dit alors que p est la projection sur $F = \ker(p - id)$ et parallèlement à $G = \ker(p)$

> On suppose que p est une projection, CàD $\forall \vec{u} \in E, \vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G \longmapsto p(\vec{u}) = \vec{u}_F$

Alors p est un projecteur, CàD p est linéaire et $p \circ p = p$

3.3 Symétrie(seur)-Symétrie(sion)

Définition 10. Symétrie

Symétrie(seur)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectorielle et $s \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que s est un *Symétrie(seur)* de E

Ssi s est linéaire et $s \circ s = id$.

Symétrie(sion)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectorielle

et F, G des ssev supplémentaires, CàD avec $F \oplus G = E$.

Pour tout $\vec{u} \in E$, on a $\vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$

La *Symétrie(sion)* p par rapport à F et parallèlement à G est la fonction définie par

$$\forall \vec{u} \in E, \vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G \longmapsto p(\vec{u}) = \vec{u}_F - \vec{u}_G$$

Théorème 11. Symétrie(seur) $\leftrightarrow$ Symétrie(sion)

> On suppose que p est un Symétrie(seur), CàD p est linéaire et $s \circ s = id$

On a alors $E = \ker(s - id) \oplus \ker(s + id)$

On dit alors que s est la Symétrie par rapport à $F = \ker(s - id)$ et parallèlement à $G = \ker(s + id)$

> On suppose que p est une Symétrie(sion), CàD $\forall \vec{u} \in E, \vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G \longmapsto p(\vec{u}) = \vec{u}_F - \vec{u}_G$

Alors s est un Symétrie(seur), CàD s est linéaire et $s \circ s = id$

4 Exercices

Exercices sur les endomorphismes

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que : $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$ Ssi $f \circ g = 0$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que f et g commutent, CàD $f \circ g = g \circ f$.

Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension fini $n < \infty$ et F, G deux ssev de E .

On suppose que : $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$.

Montrer que les ssev F et G ont au moins un vecteur non nul en commun.

Application : Dans $\mathbb{R}^3$, Que peut-on dire de l'intersection de 2 plan vectoriels ?

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

On note $\phi^2 = \phi \circ \phi$ et plus généralement $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi^n = \phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi$

Les questions sont indépendantes et de difficultés croissantes.

1. Montrer que : $\ker(\phi) \subset \ker(\phi^2)$.

Avec la même démonstration, on montre que : $\ker(\phi) \subset \ker(\phi^2) \subset \ker(\phi^3) \subset \ker(\phi^4) \subset \dots$

2. Montrer que : $\ker(\phi) = \ker(\phi^2) \implies \ker(\phi^2) = \ker(\phi^3)$

3. Montrer que : $\ker(\phi) = \ker(\phi^2) \iff \ker(\phi) \cap \text{Im}(\phi) = \{\vec{0}\}$.

Exercice 5. Banque CCP. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n .

1. Démontrer que : $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f \implies \text{Im} f = \text{Im} f^2$.

2. (a) Démontrer que : $\text{Im} f = \text{Im} f^2 \iff \text{Ker} f = \text{Ker} f^2$.

(b) Démontrer que : $\text{Im} f = \text{Im} f^2 \implies E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$.

————— Les exo de la la banque CCP —————

Exercice 6. Banque CCP. Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Justifier que P est bien un plan et que D est bien une droite.
2. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
3. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$.

Exercice 7. Banque CCP. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.

On notera Id l'application identité sur E .

1. Montrer que $\text{Im} u \oplus \text{Ker} u = E$.
2. Montrer que $\text{Im} u = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$.

Exercice 8. Banque CCP. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

————— Divers —————

Exercice 9. On considère dans $\mathbb{R}^3$.

$$F = \text{vect}((2, 1, -2)) \quad \text{et} \quad G = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}.$$

1. Déterminer les dimensions de F et G .
2. Déterminer $F \cap G$. En déduire que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
3. En utilisant les bases, montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Soit La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère la fonction f définie par : $\forall \vec{U} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), f(\vec{U}) = A\vec{U}$, c'est la fonction associée à la matrice A .

On considère les ensembles $E_{-1} = \text{ker}(f + id)$ et $E_3 = \text{ker}(f - 3id)$

1. Montrer que E_{-1} et E_3 sont des ssev, et déterminer une base et la dimension de chacun.
2. Montrer que $E_{-1} \oplus E_3 = \mathbb{R}^2$.
3. En déduire une méthode pour calculer $f^n(\vec{U}) = [f \circ f \circ \dots \circ f](\vec{U})$.

Exercice 11. Soit La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère la fonction f définie par : $\forall \vec{U} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(\vec{U}) = A\vec{U}$, c'est la fonction associée à la matrice A .

On considère les ensembles $E_3 = \text{ker}(f - 3id)$ et $E_{-3} = \text{ker}(f + 3id)$

En suivant la démarche de l'exercice précédent, calculer $f^n(\vec{U}) = f \circ f \circ \dots \circ f(\vec{U})$.

Exercice 12. Soit $\mathbb{E} = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère les ensembles $F = \{f \in \mathbb{E}, f(0) = 0\}$ et $G = \text{vect}(\cos)$.

1. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$
2. On fixe une fonction $h \in \mathbb{E}$.

On suppose qu'il existe deux fonctions $f \in G$ et $g \in G$ tel que $h = f + g$.

- > Donner les propriétés de f et de g .
- > Déterminer f et g .
- > Conclure que : $\mathbb{E} = F + G$

Exercice 13. On considère la fonction fonction h définie par

$$(x, y, z) \longmapsto (-3x + 4y - 6z, -12x + 16y - 24z, -6x + 8y - 12z)$$

1. Préciser les ensembles de départ et d'arrivée de h et trouver une matrice A tel que $h(\vec{u}) = A\vec{u}$.
2. Vérifier que h est un projecteur.
3. Déterminer les éléments géométriques de h .
4. Donner l'expression de la symétrie ayant les mêmes éléments géométriques.

Exercice 14. Soit p, q deux projecteurs de E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Montrer que : $p - q$ est un projecteur Ssi $p \circ q = q \circ p = q$.