

Programme de colle de la semaine 17

du Lundi 23 Février au 27 Février.

Questions de cours et autour du cours.

- > Stable. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g
- > Noyau et Image itérée. Soit h un endomorphisme de E .
Définir K_p et I_p .
Démontrer $K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
- > Somme, somme directe, Supplémentaire.
Définition de la somme de 2 ssev
Définition de la somme directe de 2 ssev
Définition de 2 ssev sont supplémentaires
Démonstration : F, G sont supplémentaires, CàD $F \oplus G = E \implies \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E .
- > Ssev supplémentaire.
Définition de : Les ssev F, G sont deux ssev supplémentaires
Démonstration : $F \oplus G = E \implies \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E .
- > Supplémentaire d'un hyperplan.
Définition et propriétés des hyperplans.
On suppose que $\vec{A} \notin H$. Montrer que : $H \oplus \text{vect}(\vec{A}) = E$.
- > Projecteurs. Soit p un projecteur
Propriétés des ssev $\ker(p - \lambda id)$
Définition de p est projecteur de E .
Démonstration de : $\ker(p - id) \cap \ker(p) = \{ \vec{0} \}$
Démonstration de : $\ker(p - id) = \text{Im}(p)$
- > Éléments géométriques. Soit la fonction : $p : (x; y; z) \mapsto (0; x + z; x + z)$
En utilisant les matrice, montrer p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer les éléments géométriques associés à p , CàD $\ker(p - id)$ et $\ker(p)$.

Exercices.

Des exercices sur les sommes directes, projection, symétrie
J'ai mis des exemples ci-après

Exercice 1. On considère dans $\mathbb{R}^3$.

$$F = \text{vect}((2, 1, -2)) \quad \text{et} \quad G = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}.$$

1. Déterminer les dimensions de F et G .
2. Déterminer $F \cap G$. En déduire que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
3. En utilisant les bases, montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Correction.

1. On facilement que $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est une base de F

$$\text{et } \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une base de } G$$

2. **Déterminer $F \cap G$.** On suppose que $\vec{u} = (x, y, z) \in (F \cap G)$

$$> \text{ Comme } \vec{u} \in F, \text{ on a } \vec{u} = \alpha \vec{A}, \text{ C\`aD } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ donc } x = 2\alpha, y = \alpha \text{ et } z = -2\alpha$$

$$> \text{ De plus } \vec{u} \in G, \text{ donc } x + y + z = 0$$

$$\text{Ainsi } (2\alpha) + \alpha + (-2\alpha) = \alpha = 0 \text{ et } \vec{u} = 0\vec{A} = \vec{O}.$$

$\text{CCL : } F \cap G = \{\vec{O}\} \text{ et la somme est directe.}$

En déduire que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. De plus avec Grassmann, on a $\dim(F + G) = \dots = 3$. De plus $F + G$ est un ssev de $\mathbb{R}^3$

$$\text{Conclusion : } F + G = \mathbb{R}^3 \text{ et comme la somme est directe } F \oplus G = \mathbb{R}^3$$

3. **En utilisant les bases, montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.**

$$\text{On réunit } \mathcal{B}_F = \{\vec{A}\} \text{ et } \mathcal{B}_G = \{\vec{B}, \vec{C}\}$$

$$\text{La famille } \{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\} \text{ est dans } \mathbb{R}^3 \text{ et libre (car } \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \dots \neq 0)$$

$$\text{De plus cardinal}=3 \text{ et } \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

$$\text{Conclusion : C'est une base de } \mathbb{R}^3, \text{ ainsi on a } F \oplus G = \mathbb{R}^3$$

Exercice 2. Soit La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère la fonction f définie par : $\forall \vec{U} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(\vec{U}) = A\vec{U}$, c'est la fonction associée à la matrice A .

On considère les ensembles $E_3 = \ker(f - 3id)$ et $E_{-3} = \ker(f + 3id)$

1. Montrer que E_{-3} et E_3 sont des ssev, et déterminer une base et la dimension de chacun.
2. Montrer que $E_{-3} \oplus E_3 = \mathbb{R}^3$.
3. En déduire une méthode pour calculer $f^n(\vec{U}) = [f \circ f \circ \dots \circ f](\vec{U})$.

Correction.

1. On facilement que $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de E_{-3}

et $\vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de E_3

2. En utilisant les bases, on va montrer que : $E_{-3} \oplus E_3 = \mathbb{R}^3$.

On réunit $\mathcal{B}_{E_{-3}} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ et $\mathcal{B}_{E_3} = \{\vec{c}\}$

La famille $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ est dans $\mathbb{R}^3$ et libre (car $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \dots \neq 0$)

De plus cardinal=3 et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Conclusion : C'est une base de $\mathbb{R}^3$, ainsi on a $E_{-3} \oplus E_3 = \mathbb{R}^3$.

3. En déduire une méthode pour calculer $f^n(\vec{U}) = [f \circ f \circ \dots \circ f](\vec{U})$.

Comme $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ et $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ est un base, ainsi on peut écrire $\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

De plus $\vec{a}, \vec{b} \in E_{-3}$ donc $f^n(\vec{a}) = (-3)^n\vec{a}$ et $f^n(\vec{b}) = (-3)^n\vec{b}$

Et $\vec{c} \in E_3$ donc $f^n(\vec{c}) = 3^n\vec{c}$

$$\begin{aligned} \text{Conclusion : } f^n(\vec{u}) &= f(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) \\ &= \alpha f^n(\vec{a}) + \beta f^n(\vec{b}) + \gamma f^n(\vec{c}) \\ &= \alpha(-3)^n\vec{a} + \beta(-3)^n\vec{b} + \gamma 3^n\vec{c} \end{aligned}$$

Exercice 3. Une projection dans $\mathbb{R}^2$

On considère $F = \{ \vec{u} = (x; y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x = y \}$ et $G = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

1. Vérifier que F et G sont 2 droites vectorielles.
2. Justifier que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$
3. Déterminer, en fonction de $\vec{u} = (x; y)$, l'expression de $p(\vec{u}) = (x'; y')$ la projection sur F et parallèlement à G
4. Déterminer, en fonction de $\vec{u} = (x; y)$, l'expression de $s(\vec{u}) = (x''; y'')$ la symétrie par rapport à F et parallèlement à G

Correction.

1. facile

2. Justifier que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$

Lire la correction des deux exo précédent

3. Déterminer, en fonction de $\vec{u} = (x; y)$, l'expression de $p(\vec{u}) = (x'; y')$ la projection sur F et parallèlement à G

Je le fais en classe Lundi

4. Déterminer, en fonction de $\vec{u} = (x; y)$, l'expression de $s(\vec{u}) = (x''; y'')$ la symétrie par rapport à F et parallèlement à G

Je le fais en classe Lundi