

Développement limité.		2.5 Séries Taylor.	6
1 Dominée, négligeable et équivalent.	1	3 Existence et DL classiques.	7
1.1 Dominée, négligeable et équivalent.	1	3.1 DL classiques	7
1.2 Exercices	3	3.2 Troncature, Unicité, Parité.	8
2 Formules de Taylor	4	3.3 Primitiver un DL.	9
2.1 Formule de Taylor pour les polynômes	4	4 Interpréter/utiliser les DL.	11
2.2 Égalité de Taylor avec reste intégrale	4	4.1 Interprétation géométrique.	11
2.3 Inégalités de Taylor, CàD TAF-IAF et TTAAAFFF	5	4.2 Transfert de propriétés.	11
2.4 Application aux DL : Taylor-Young.	6	5 Exercices	13

1 Dominée, négligeable et équivalent.

1.1 Dominée, négligeable et équivalent.

Définition 1. Petit "o", Grand "O"

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

> On dit que le nombre u_n est **négligeable** devant v_n quand n tend vers ∞

$$\text{Ssi } \text{Quotient} = \frac{\text{Petit}}{\text{Gros}} = \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On note alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$ et on dit que : u_n est un petit "o" de v_n .

> On dit que le nombre u_n est **dominé** par le nombre v_n quand n tend vers ∞

$$\text{Ssi } \text{Quotient} = \frac{\text{Petit}}{\text{Gros}} \text{ est Borné} \iff \left| \begin{array}{l} \text{il existe } K \text{ et } N_0 \text{ tel que} \\ \forall n \geq N_0, |u_n| \leq K |v_n| \end{array} \right.$$

On note alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et on dit que : u_n est un grand "O" de v_n .

L'axe de hiérarchie

petit

Gros

> $u_n = o(v_n) \iff u_n$ se situe à une position **strictement** inférieur à celle de v_n .

> $u_n = \mathcal{O}(v_n) \iff u_n$ se situe à une position **inférieur ou égale** à celle de v_n .

Remarque : u_n se situe à la même position que v_n ~~$\succsim$~~ $u_n \sim v_n$

On a la même définition pour les fonctions MAIS il faut préciser $x \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow \pm\infty$ ou $x \rightarrow a$

$$f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g) \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \iff \text{Quotient} = \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$
$$f \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g) \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x)) \iff \text{Quotient} = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée (au voisinage de } a \text{)}$$

Attention :

Quand $x \rightarrow 0$, on a :

petit

x^3

x^2

x^1

x^0

Gros

Quand $x \rightarrow \infty$, on a :

petit

x^0

x^1

x^2

x^3

Gros

Définition 2. Équivalent, Partie Principale

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

> On dit que le nombre u_n est **équivalente** à v_n quand n tend vers ∞

$$\text{Ssi } \text{Quotient} = \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

On note alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ et on dit que : le nombre u_n est équivalent à v_n .

On n'est jamais équivalent à 0 ou à ∞

$$\begin{aligned} u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell &\iff u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ell + o(1) \\ &\iff u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ell \text{ Lorsque } \ell \neq 0 \text{ et } \ell \neq \infty \end{aligned}$$

Lorsque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ou ∞ alors le nombre u_n se rapproche de 0 ou ∞ avec une certaine vitesse et l'équivalent mesure cette vitesse.

> La partie principale d'une expression est un équivalent normalisée, CàD

Un équivalent de la forme $K.(\ln x)^a . x^b . e^{cx}$ OU $K.(\ln n)^a . n^b . r^n$

Théorème 3. Formulaire sur les petits "o", grands "O" et 1+o(1)

$o(1)$ c'est un TRUC qui tend vers 0.

> Les produit se "regroupent",

$$\text{CàD } x o(x^2) = o(x^3) = x^3 o(1) \text{ ou } o(x^3) o(x^2) = o(x^5)$$

> Sinon on "garde" le plus gros

$$2 o(x^2) - 3 o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2) \quad \text{et} \quad 2 o(x^2) - 3 o(x^3) \underset{x \rightarrow \infty}{=} o(x^3)$$

$$o\left(x^2 + x^3 + o(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$$

> Attention : $\frac{o(\text{truc})}{o(\text{machin})}$ C'est une FI!!!!

$\mathcal{O}(1)$ c'est un truc borné.

Le formulaire est le même que pour le petit "o".

$[1 + o(1)]$ c'est un TRUC qui tend vers 1.

$$> \frac{[1 + o(1)][1 + o(1)]}{[1 + o(1)]} = [1 + o(1)]$$

$$> [1 + o(1)]^3 = [1 + o(1)]$$

$$> \ln([1 + o(1)]) = o(1)$$

$$> e^{[1 + o(1)]} = e^1 \underbrace{e^{o(1)}}_{\rightarrow e^0=1} = e[1 + o(1)]$$

$$u_n = v_n[1 + o(1)] \iff u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$$

$$\text{La formule de Stirling : } n! \underset{n \rightarrow \infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} [1 + o(1)] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

1.2 Exercices

Exercice 1.

1. Réécrire les sommes en les ordonnant par ordre décroissante de domination,

CàD (Le plus gros) + (le 2+ième plus gros)+.....

$$> \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} + \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + 1 + \frac{\sqrt{n}}{n^2} =$$

$$> n + n(\ln n)^2 + \frac{n}{\sqrt{n}} + n^2\sqrt{\ln n} + n^2 \ln n + o(\sqrt{n}) =$$

$$> \ln(n) + \ln(n^2) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + (\ln n)^2 =$$

2. On suppose que $x \rightarrow 0$. Réécrire les sommes en les ordonnant par ordre décroissante de domination.

$$> \frac{1}{x^2} + \ln x + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3 + x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$> x + x \ln x + o(x^2 \ln x) + x^2 + o(x^2) =$$

3. On suppose que $x \rightarrow +\infty$. Réécrire les sommes en les ordonnant par ordre décroissante de domination.

$$> \frac{1}{x^2} + \ln x + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3 + x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$> x + x \ln x + o(x^2 \ln x) + x^2 + o(x^2) =$$

Exercice 2. Déterminer le petit "o" final.

$$o\left(\frac{n}{2^n}\right) - 2o\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right) + 3o\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right) =$$

$$o(\ln n) - \frac{1}{2}o(\ln^2 n) + o(\ln(n^2)) =$$

$$x o(x^2) + o(\sqrt{x}) o(x^2) + e^{2x} o(1) = \begin{cases} \text{Quand } x \rightarrow 0 & = \\ \text{Quand } x \rightarrow +\infty & = \\ \text{Quand } x \rightarrow -\infty & = \end{cases}$$

2 Formules de Taylor

2.1 Formule de Taylor pour les polynômes

2.2 Égalité de Taylor avec reste intégrale

Théorème 4. Formules de Taylor avec reste intégrale

Soit f une fonction $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-M, M]$

Alors pour tout $x \in [-M, M]$, on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

Démonstration : On procède par récurrence sur n

et on utilise $(x-t)^n \overset{\text{Une primitive}}{\rightsquigarrow} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$ Attention la variable d'intégration c'est t

2.3 Inégalités de Taylor, CàD TAF-IAF et TTTAAFFFF

Théorème 5. TAF ou IAF

Soit f une fonction

On suppose - que la fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$

- et que $\forall t \in [-a, a], |f'(t)| \leq K$

Alors la fonction f est K lipschitzienne sur $[-a, a]$

CàD $\forall x, x' \in [-a, a], |f(x) - f(x')| \leq K |x - x'|$

Application : J'applique avec $x' = 0$,

ainsi on a $\forall x \in [-a, a], |f(x) - f(0)| \leq K |x|$

Théorème 6. Inégalité de Taylor ou TTTAAFFFF

Soit f une fonction

On suppose - que la fonction f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-a, a]$

- et que $\forall t \in [-a, a], |f^{(n+1)}(t)| \leq K$

Alors on a $\forall x, x' \in [-a, a], \left| f(x) - \left[f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \right] \right| \leq K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

Démonstration : C'est assez clair sauf à la fin

$$\begin{aligned}
 |Gauche| &= \left| \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right| \\
 &\quad \text{Inégalité triangulaire} \\
 &\leq \int_0^x \left| f^{(n+1)}(t) \right| \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right| dt \\
 &\quad \text{Majoration brutale} \\
 &\leq \int_0^x K \frac{|x-t|^n}{n!} dt \\
 &\leq K \frac{|x|^n}{n!} |x-0| \\
 &\leq K \frac{|x|^n}{n!} \cdot |x| = K \frac{|x|^{n+1}}{n!}
 \end{aligned}$$

Pour obtenir le $(n+1)!$, il faut faire une majoration moins brutale en gardant $(x-t)^n$ puis distinguer les situations $x > 0$ et $x < 0$ pour simplifier les V.A. et enfin utiliser

$$(x-t)^n \overset{\text{Une primitive}}{\rightsquigarrow} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \quad \text{Attention la variable d'intégration c'est } t$$

2.4 Application aux DL : Taylor-Young.

Théorème 7. Le théorème de Taylor-Young

Soit f une fonction $\mathcal{C}^n$ sur $[-a, a]$

$$\text{Alors } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Lorsque f est $\mathcal{C}^{n+1}$ ou $\mathcal{C}^\infty$ alors on peut remplacer $o(x^n)$ par $\mathcal{O}(x^{n+1})$

Démonstration : On doit montrer que $f(x) - \left[f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \right]$ est négligeable devant x^n ,

$$\text{CàD } Quotient = \frac{\text{petit}}{\text{gros}} \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

On se met dans les conditions du théorème de TTTAAFFFF (on verra que c'est possible plus tard)

$$\text{Ainsi on a : } |Quotient| = \left| \frac{\text{petit}}{x^n} \right| \leq \frac{K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{|x|^n} = K \frac{|x|}{(n+1)!}$$

Comme $K \frac{|x|}{(n+1)!} \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, le théorème du module assure que $Quotient \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.

Remarque : Pour démontrer le théorème avec l'hypothèse "la fonction est $\mathcal{C}^n$ ", il faut utiliser Taylor avec reste intégrale et le travailler de façon subtile.

2.5 Séries Taylor.

On verra plus tard quand on fera les séries

3 Existence et DL classiques.

3.1 DL classiques

Définition 8.

Soit f une fonction définie au voisinage de 0, CàD sur $] -a, a[$ avec $a > 0$.

On dit que f admet un $DL_n(0)$, CàD un développement limité à l'ordre n en 0

Ssi il existe des constantes $a_0, a_1, \dots, a_n$ tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

Vocabulaire : Dans un développement limité (DL), les puissances sont des entiers positifs, sinon cela s'appelle un développement asymptotique (DA)

Exemple et interprétation : On a $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

Cela signifie qu'autour de 0 et avec une précision, un grossissement, une pixelisation égale à x^2 ,

il n'y a pas de différence "mesurable" entre e^x et $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$

MAIS on sait que e^x et $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$ ce n'est pas égale

Théorème 9. Le théorème de Taylor-Young sur l'existence des DL.

Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $[-A, A]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

alors la fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0.

De plus le DL est de la forme $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} h(0) + h'(0)x + h''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + h^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

C'est le théorème de Taylor-Young

Voici les développements limités des fonctions classiques en 0 à l'ordre n , CàD les $DL_n(0)$.

$$\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) + \text{ou plus longue} \dots$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7) + \dots$$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3) + \dots$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) + \dots$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \underbrace{\alpha(\alpha-1)}_{2 \text{ termes}} \frac{x^2}{2!} + \underbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}_{3 \text{ termes}} \frac{x^3}{3!} + o(x^3) + \dots$$

Complément-Remarque :

Comme la fonction f est supposé $\mathcal{C}^\infty$, le DL est encore valide mais avec à $\mathcal{O}(x^{n+1})$.

Démonstration. Pour chaque fonction h : on calcule $h^{(k)}$ puis $h^{(k)}(0)$ et on utilise la formule

$$h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} h(0) + h'(0)x + h''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + h^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Pour la fonction $h(x) = e^x$.

On sait que : $\forall k \in \mathbb{N}, x, h^{(k)}(x) = e^x$

ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, h^{(k)}(0) = 1$.

Pour la fonction $h(x) = \cos(x)$.

On sait que : $\forall k \in \mathbb{N}, x, h^{(k)}(x) = \pm \sin(x) \text{ ou } \pm \cos(x)$

ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, h^{(2k)}(0) = (-1)^k \text{ et } h^{(2k+1)}(0) = 0$.

Pour la fonction $h(x) = \sin(x)$.

On sait que : $\forall k \in \mathbb{N}, x, h^{(k)}(x) = \pm \sin(x) \text{ ou } \pm \cos(x)$

ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, h^{(2k)}(0) = 0 \text{ et } h^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$.

Pour la fonction $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

On sait que : $\forall k \in \mathbb{N}, x, h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$

ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, h^{(k)}(0) = (-1)^k k!$.

Pour la fonction $h(x) = \ln(1+x)$.

On sait que : $\forall k \geq 1, \forall x, h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^{k+1}}$

ainsi $\forall k \geq 1, h^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$.

Pour la fonction $h(x) = (1+x)^\alpha$.

On sait que : $\forall k \geq 1, \forall x, h^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

ainsi $\forall k \geq 1, h^{(k)}(0) = \underbrace{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}_{k \text{ facteurs}}$.

3.2 Troncature, Unicité, Parité.

Théorème 10.

On suppose que la fonction f a un $DL_n(0)$ de la forme $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$

> Alors on peut tronquer le DL,

CàD on a aussi $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$

> Alors il y a unicité des coefficients du DL.

> On suppose que la fonction f est paire (resp. impaire).

Alors le DL ne contient que des monômes pairs (resp. impairs).

Démonstration de la troncature

C'est facile car $x^3 = o(x^2)$ donc $a_3 x^3 = o(x^2)$, ainsi $a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2) + o(x^2) + \dots + o(x^2) = o(x^2)$

Conclusion : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$

Démonstration de l'unicité

On suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + o(x^n)$.

On va montrer : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, a_k = b_k$

On utilise l'unicité de la limite

> Avec le premier DL, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0$ et avec le second DL, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = b_0$

Par unicité de la limite, on a $a_0 = b_0 = a$.

> On poursuit,

$$\frac{f(x) - a}{x} = \frac{[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)] - a_0}{x} = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}) \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_1$$

On fait le même calcul avec l'autre DL et on trouve $\frac{f(x) - a}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} b_1$

Par unicité de la limite, on a $a_1 = b_1$.

> On recommence avec $\frac{f(x) - (a_0 + a_1 x)}{x^2} \dots \dots \dots$

Démonstration de la parité

On suppose que la fonction f est paire, ainsi $\forall x, f(-x) = f(x)$

On dérive k fois l'égalité ainsi $\forall x, (-1)^k f^{(k)}(-x) = f^{(k)}(x)$.

On applique en $x = 0$ ainsi $(-1)^k f^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ et on discute

Lorsque k est impair, CàD Ainsi $f^{(k)}(0) = f^{(2a+1)}(0) = 0$

Donc il n'y a pas de monôme impair

Exemples

> La fonction Sinus est impaire et on a bien : $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^9)$

> La fonction Cosinus est paire et on a bien : $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$

> La fonction Cosinus hyperbolique est paire et on a bien :

$$\begin{aligned} \cosh(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2} \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + \mathcal{O}((-x)^5) \right] \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned}$$

3.3 Primitiver un DL.

Théorème 11. Le théorème de primitives des DL

Soit f une fonction de $[-a, a]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

On suppose que

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [-a, a] \\ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ On peut primitiver le DL sur $[-a, a]$,

$$\text{Ainsi on a } \forall x \in [-a, a], F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{K}_{=F(0)} + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)$$

De plus la constante K se calcule avec $x = 0$ ainsi $K = F(0)$ et $\mathcal{O}\left(\frac{x^4}{4}\right) = \mathcal{O}(x^4)$.

Application 1 : Lien entre les DL de $\frac{1}{1+x}$ et DL de $\ln(1+x)$

$$\left. \begin{array}{l}
 x \mapsto \frac{1}{1+x} \text{ est continue sur }]-1, 1[\\
 \text{On sait que : } \frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^4)
 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{On peut primitiver le DL sur ,}$$

$$\ln|1+x| \underset{x \rightarrow 0}{=} K + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)$$

De plus $K = \ln(1+0) = 0$ et $\forall x \in]-1, 1[, \ln|1+x| = \ln(1+x)$,

$$\textbf{Conclusion : } \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)$$

Application 2 : Calcul du DL de $\arctan(x)$

$$\left. \begin{array}{l}
 x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\
 \text{On sait que : } \frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \mathcal{O}(x^8)
 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{On peut primitiver le DL ,}$$

$$\text{CàD } \arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} K + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^9)$$

De plus $K = \arctan(0) = 0$,

$$\textbf{Conclusion : } \arctan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^9)$$

Avec la même technique, on peut retrouver les DL en 0 de $\arcsin(x)$, de $\arccos(x)$,....

Application 3 : Calcul du DL de $\tan(x)$

On utilise astucieusement la relation $\tan' = 1 + \tan^2$

4 Interpréter/utiliser les DL.

4.1 Interprétation géométrique.

Théorème 12. Interprétation (géométrique) des DL.

Soit f une fonction avec $f(x) = 2 + 3x - 4x^2 + o(x^2)$.

On a alors

> Le premier terme non nul c'est la PP, ainsi

$$f(x) = 2 + 3x - 4x^2 + o(x^2) \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2$$

> Les termes $a + bx$ donne l'équation de la droite tangente en 0.

$$f(x) = 2 + 3x - 4x^2 + o(x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 + 3x \text{ est l'équation de la droite tangente en } 0$$

Remarque : il est possible que $a = 0$ ou/et $b = 0$.

> Le signe premier terme non nul après $a + bx$ donne la position par rapport à la tangente.

$$f(x) = 2 + 3x - 4x^2 + o(x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 + 3x \text{ est l'équation de la tangente en } 0$$

ET

Comme $-4x^2 < 0$ la fonction est
sous sa tangente au voisinage de 0.

4.2 Transfert de propriétés.

Théorème 13. Transfert de propriétés.

> Calculer les limites

$$\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n \\ v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$$

> Majorer, minorer, encadrer.

On suppose que la *Truc* > 0.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \text{Truc} \\ \text{Truc est positif} \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{il existe } N_0 \text{ tel que} \\ \text{Si } n \geq N_0 \text{ alors } \frac{1}{2} \text{Truc} \leq u_n \leq 2 \text{Truc} \end{array} \right|$$

> Déterminer les signes

$$\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \text{Truc} \\ \text{Truc est positif} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est positive} \\ \text{à partir d'un certain rang.} \end{array}$$

Démonstration : > La démonstration est assez évidente.

Comme $u_n \sim v_n$, on a $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, ainsi

$$u_n = \frac{u_n}{v_n} \cdot v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \cdot \ell$$

> Comme on veut montrer une inégalité à partir d'un certain rang, on suit la démarche classique

J'applique la définition de $Quotient = \frac{u_n}{PP} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ avec $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$

ainsi il existe N_0 tel que Si $n \geq N_0$

$$\frac{1}{2} = \ell - \varepsilon \leq \frac{u_n}{PP} \leq \ell + \varepsilon = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} PP \leq u_n \leq \frac{3}{2} PP$$

> Il suffit d'utiliser ce qui précède.

5 Exercices

Calculs

Exercice 3. Donner les développements limités en 0 à l'ordre n des expressions suivantes, CàD avec $o(x^n)$:

1. Formule simple

1. e^{x^2} , $n = 7$
2. $\sin(3x)$, $n = 6$
3. $\frac{1}{1-x^2}$, $n = 7$
4. $\sqrt{1+x}$, $n = 2$
5. $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $n = 2$
6. $\ln(1-3x^2)$, $n = 7$

2. Produit

1. $e^x \sin(2x)$, $n = 2$
2. $\frac{\cos(x)}{1+x}$, $n = 2$
3. $\frac{\ln(1-x/2) \cos(x)}{x}$, $n = 2$

Exercice 4. [Correction] Déterminer les développements limités en $x = 0$ pour les expressions suivantes

$$\ln(\cos(x)) \quad \sqrt{1+\sin(x)} \quad \frac{x}{\sin(x)} \quad e^{\cos(x)} \quad \tan(x)$$

Exercice 5. Kulture Calculer un équivalent de u_{n+1} pour les suites suivantes

Classique : $u_n = n^2$, $u_n = n^3$, $u_n = \sqrt{n}$, $u_n = \ln(n)$, $u_n = e^n$

Plus difficile : $u_n = n!$, $u_n = n^n$

Limite

Pour calculer une limite et/ou une limite

> Si $x \rightarrow 1$, on écrit (et remplace) $x = 1 + h$ et maintenant $h \rightarrow 0$.

> On fait du FFB (si besoin) et on trouve le plus gros de chaque item (avec un DL si besoin)
et on conclut avec $\underset{x \rightarrow 0}{=} Gros[1 + o(1)]$

Exercice 6. [Correction] Déterminer un équivalent pour les expressions suivantes puis donner la limite

$$\frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{4x^3 - x^2 - x}{(2x+1)(x^2-x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim}$$

$$2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim}$$

$$\ln(1+e^x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim}$$

$$\sqrt{\frac{(1-\ln x)(x+2)}{(1-x)\ln(1+x)}} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim}$$

$$\frac{\ln(x^7 + \sqrt[5]{x})}{x^2 + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim}$$

$$\frac{n^3 + 2n^2 - n}{(n+1)(n^2-n)} \sim \frac{4x^3 - x^2 - x}{(2x+1)(x^2-x)} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim}$$

$$\frac{n^2 \ln(1+1/n)}{\tan(\pi/n)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim}$$

$$\ln(1+e^x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim}$$

$$\ln(1+x) + \sin(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim}$$

$$\frac{\ln(x^7 + \sqrt[5]{x})}{x^2 + 1} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim}$$

$$\frac{\ln(n^4 + 1)}{n+1} \sim$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim}$$

$$\ln(1+e^x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim}$$

$$\ln(1+x) + \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim}$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim}$$

Exercice 7. [Correction]

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$
Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$
Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$

3. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$
Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$

4. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$
Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$

Exercice 8. [Correction] Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. On note $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*, n > -a$.

Déterminer le module et un argument de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)$, puis de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n et, si nécessaire, la fonction arctan.

3. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

DL et interprétation

Exercice 9. [Correction] Donner les développements limités en 0 à l'ordre n des expressions suivantes

1. Déterminer un équivalent de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$

2. Donner le développement limité de e^x à l'ordre 3 en 2.

3. Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 2.

4. Donner le développement de $\frac{1}{\sin(x)}$ à l'ordre 3 quand $x \rightarrow 0$.

Exercice 10. Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$

1. Déterminer $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition de f .

2. Former, en $+\infty$, le développement asymptotique de f à la précision $\frac{1}{x}$.

3. En déduire l'existence d'une droite asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe représentative de f .
Étudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice 11. [Correction] Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$

1. Déterminer $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition de f .

2. Déterminer le $DL_3(0)$ de f .

3. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 12. Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

1. Déterminer $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition de f .

2. Déterminer le $DL_2(0)$ de f .

Déterminer la tangente à la courbe en 0 et leurs positions relatives au voisinage de 0.

3. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x + 1 + \frac{3}{2x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Exercice 13. Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{t^2} dt$.

1. Déterminer $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition de f .

2. Déterminer le $DL_4(0)$ de l'expression $\int_0^x e^{t^2} dt$.

En déduire les DL en 0 de la fonction f .

Peut-on définir $f(0)$?

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$\forall x > -1, \quad f(x) = \cos(x) \ln(1+x)$$

En utilisant le DL en 0, calculer $f^{(5)}(0)$.

Bonus

Exercice 15. Déterminer un équivalent de $(n+1)^{1/n} - n^{1/(n+1)}$ et de $\sin(x)^{\sin(x)} - x^x$

Correction.

Solution de l'exercice 4 ([Énoncé](#)) Ce sont des composées

$$\begin{aligned}
 \ln(\cos(x)) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \\
 &= \ln(1 + \square) \\
 &= \square - \frac{\square^2}{2} + \frac{\square^3}{3} + o(\square^3) \\
 &\quad \text{avec } \square = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\
 &\quad \square^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
 &\quad \square^3 = o(x^4) \\
 &\quad o(\square^3) = o(x^4) \\
 &= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{2} + o(x^4) + o(x^4) \\
 &= -\frac{x^2}{2!} + x^4 \left[\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\right] + o(x^4) \\
 \\
 \sqrt{1 + \sin(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} \\
 &= \sqrt{1 + \square} \\
 &= 1 + \frac{1}{2}\square - \frac{1}{8}\square^2 + o(\square^2) \\
 &\quad \text{avec } \square = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \\
 &\quad \square^2 = x^2 - x^4 \left[\frac{-1}{6} + \frac{-1}{6}\right] + o(x^5) \\
 &\quad o(\square^2) = o(x^2) \\
 &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) - \frac{1}{8}\left(x^2 - x^4 \left[\frac{-1}{6} + \frac{-1}{6}\right] + o(x^5)\right) + o(x^2) \\
 &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sin(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)} \\
&= \frac{1}{1 + \square} \\
&= 1 - \square + \square^2 + o(\square^2) \\
&\quad \text{avec } \square = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \\
&\quad \square^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4) \\
&\quad o(\square^2) = o(x^4) \\
&= 1 + \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \right) - \left(\frac{x^4}{36} + o(x^4) \right) + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{x^2}{3} + x^4 \left[\frac{1}{120} - \frac{1}{26} \right] + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\cos(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) \\
&= e^1 \exp \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) \\
&= e e^{\square} \\
&= e \left(1 + \square + \frac{\square^2}{2} + o(\square^2) \right) \\
&\quad \text{avec } \square = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\
&\quad \square^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
&\quad o(\square^2) = o(x^4) \\
&= e \left[1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) + \frac{\left(\frac{x^4}{4} + o(x^4) \right)}{2} + o(x^4) \right] \\
&= e - \frac{e}{2} x^2 + x^4 e \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8} \right) + o(x^4)
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

$$\frac{n(n+1)}{2} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{n n[1+o(1)]}{2}$$

$$\frac{n^3 + 2n^2 - n}{(n+1)(n^2 - n)} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{n^3[1+o(1)]}{n[1+o(1)] \cdot n^2[1+o(1)]} = 1[1+o(1)]$$

$$\frac{\ln(n^4 + 1)}{n+1} = \ln(n^4) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^4}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{\ln(n^4)[1+o(1)]}{n[1+o(1)]} = \frac{4 \ln(n)}{n} [1+o(1)]$$

$$\frac{4x^3 - x^2 - x}{(2x+1)(x^2 - x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{(-x)[1+o(1)]}{(1)[1+o(1)](-x)[1+o(1)]} = 1[1+o(1)]$$

$$\frac{4x^3 - x^2 - x}{(2x+1)(x^2 - x)} \underset{x \rightarrow \infty}{=} \frac{4x^3[1+o(1)]}{(2x[1+o(1)])(x^2[1+o(1)])} = 2[1+o(1)]$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x[1+o(1)]}{1[1+o(1)]} = x[1+o(1)]$$

$$2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} 2^n \cdot \frac{\pi}{2^n} [1+o(1)] = \pi[1+o(1)]$$

$$\frac{n^2 \ln(1 + 1/n)}{\tan(\pi/n)} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{n^2 \frac{1}{n} [1+o(1)]}{\pi/n [1+o(1)]} = n^2 / \pi [1+o(1)]$$

$$\ln(1 + e^x) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) \underset{x \rightarrow \infty}{=} \ln(e^x)[1+o(1)] = x[1+o(1)]$$

$$\ln(1 + e^x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(1 + e^0) = \ln(2) \quad \text{Donc } \ln(1 + e^x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2)[1+o(1)]$$

$$\ln(1 + e^x) = \ln(1 + \square) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} \square[1+o(1)] = e^x[1+o(1)]$$

$$\sqrt{\frac{(1 - \ln x)(x+2)}{(1-x)\ln(1+x)}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{\frac{(-\ln x)(2)[1+o(1)]}{(1[1+o(1)])(x[1+o(1)])}} = \sqrt{\frac{-2 \ln x}{x}} [1+o(1)]$$

$$\ln(1+x) + \sin(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} \ln(1+x)[1+o(1)] \underset{x \rightarrow \infty}{=} \ln(x)[1+o(1)]$$

$$\ln(1+x) + \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} [x+o(x)] + [x+o(x)]$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + o(x) \underset{n \rightarrow \infty}{=} 2x[1+o(1)] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2x$$

$$\frac{\ln(x^7 + \sqrt[5]{x})}{x^2 + 1} \underset{x \rightarrow \infty}{=} \frac{\ln(x^7)[1+o(1)]}{x^2[1+o(1)]} = \frac{7 \ln x}{x^2} [1+o(1)]$$

$$\frac{\ln(x^7 + \sqrt[5]{x})}{x^2 + 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\ln(\sqrt[5]{x}[1+o(1)])}{1[1+o(1)]} = \sqrt{\frac{\ln x}{5}} [1+o(1)]$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n} [1+o(1)]$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{x}{x[1 + o(1)]} = 1[1 + o(1)] \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin(x)}{x} \right] \\ &= \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)}{x^2} \\ &= \frac{x[1 - 1] + x^3 \left[\frac{-1}{2} + \frac{1}{6}\right] + o(x^3)}{x^2} = \frac{-1}{3}x + o(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)}{x x[1 + o(1)]} = \frac{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^2[1 + o(1)]} = \frac{x}{6}[1 + o(1)] \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right] \\ &= -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{-x^2 \cos(x) + \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} \\ &= \frac{-x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) + \left(x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + o(x^4)\right)}{x^4[1 + o(1)]} \\ &= \frac{x^4 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + o(x^4)}{x^4[1 + o(1)]} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right][1 + o(1)] \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

3. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$

4. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \exp(n \ln(1 + x/n)) \\ &= \exp\left(n \left[\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right) \\ &= \exp(x + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n > -a$.

Déterminer le module et un argument de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)$

$$\text{On a } A = 1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{a+ib}{n} = \left(1 + \frac{a}{n}\right) + i \left(\frac{b}{n}\right)$$

Comme $n > -a$, on $\operatorname{Re}(A) > 0$ donc on peut choisir l'argument $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\text{On a } |A| = \left|1 + \frac{z}{n}\right| = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{2a}{n}[1 + o(1)]}$$

$$> \frac{A}{|A|} = \frac{\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{|A|} + i \frac{\frac{b}{n}}{|A|} = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \text{ on a donc } \tan \theta = \frac{\frac{b}{n}}{1 + \frac{a}{n}}$$

$$\text{conclusion : } \theta_n = \arctan\left(\frac{\frac{b}{n}}{1 + \frac{a}{n}}\right) = \arctan \frac{b}{n+a} \text{ car } \theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

puis de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n et, si nécessaire, la fonction $\arctan$.

$$\text{On a } \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(|A| e^{i\theta_n}\right)^n = |A|^n e^{in\theta_n}$$

3. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

$$\begin{aligned} \text{On a } |A|^n &= \left[1 + \frac{2a}{n}[1 + o(1)]\right]^{n/2} = \exp\left[\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{2a}{n}[1 + o(1)]\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{n}{2} \frac{a}{n}[1 + o(1)]\right] \\ &= \exp[a[1 + o(1)]] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > n\theta_n &= n \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right) = n \arctan\left(\frac{b}{n}[1 + o(1)]\right) \\ &= n \frac{b}{n}[1 + o(1)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \end{aligned}$$

$$\text{conclusion : } \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = |A|^n e^{in\theta_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^a e^{ib} = e^z$$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e &= e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} - e \\
&= e^{n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]} - e \\
&= e^{1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e \\
&= e e^{\square} - e \\
&= e \left(1 + \square + \frac{\square^2}{2} + o(\square^2) \right) - e \\
&\quad \text{avec } \square = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\quad \square^2 = -\frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\quad o(\square^2) = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= e \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - e \\
&= \frac{-e}{2n} + \frac{5e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

2. On a

$$e^x = e^{2+h} = e^2 e^h = e^2 \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + o(h^2) \right) = e^2 + e^2 h + \frac{e^2 h^2}{2!} + o(h^2)$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \ln(1+2+h) = \ln(3+h) = \ln \left[3 \left(1 + \frac{h}{3} \right) \right] \\
&= \ln(3) + \ln \left(1 + \frac{h}{3} \right) \\
&= \ln(3) + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{18} + o(h^2) \\
&= \ln(3) + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{18} + o(h^2)
\end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin(x)} &= \frac{1}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} \\
&= \frac{1}{x \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \right]} \\
&= \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \square} \\
&= \frac{1}{x} \left(1 - \square + \square^2 + o(\square^2) \right) \\
&= \frac{1}{x} \left(1 - \left[-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \right] + \left[\frac{x^4}{36} + o(x^4) \right] + o(x^4) \right) \\
&= \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{6} + x^4 \left[\frac{-1}{120} + \frac{1}{36} \right] + o(x^4) \right) \\
&= \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + x^3 \left[\frac{-1}{120} + \frac{1}{36} \right] + o(x^3)
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 11 (Énoncé)

1. La fonction n'est pas définie en 0.
2. On a

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} - \frac{1}{x} \\
 &= \frac{1}{x \left[1 - \frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \right]} - \frac{1}{x} \\
 &= \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \square} - \frac{1}{x} \\
 &= \frac{1}{x} \left(1 - \square + \square^2 + o(\square^2) \right) - \frac{1}{x} \\
 &= \frac{1}{x} \left(1 - \left[-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \right] + \left[\frac{x^4}{36} + o(x^4) \right] + o(x^4) \right) - \frac{1}{x} \\
 &= \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{6} + x^4 \left[\frac{-1}{120} + \frac{1}{36} \right] + o(x^4) \right) - \frac{1}{x} \\
 &= \frac{x}{6} + x^3 \left[\frac{-1}{120} + \frac{1}{36} \right] + o(x^3)
 \end{aligned}$$

3. La fonction se prolonge en $x=0$ avec $f(0)=0$

Le graphe admet une tangente en $x=0$ d'équation $y = \frac{x}{6}$.

Comme $\left[\frac{-1}{120} + \frac{1}{36} \right] > 0$, le graphe de fonction f au dessus de sa tangente en 0^+ et en dessous de sa tangente en 0^-