

Exercice 1. [Correction]

Question 1,2,3,4,5 : piste bleu-rouge.

Rq : Comme c'est dans $\mathbb{R}^4$, les calculs sont lourds d'où la couleur rougeâtre

Question 6,7 : piste rouge.

Question 8,9,10 : piste noir.

On travaille dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

On adopte dans toute la suite les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (1, 2, 0, 1) & F &= \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \\ \vec{b} &= (3, -1, -1, 2) \\ \vec{c} &= (0, 0, 3, 4) & G &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} y - 2z + 5t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

1. Montrer que l'ensemble F est un espace vectoriel de dimension finie et calculer $\dim(F)$.
2. Montrer que l'ensemble G est un espace vectoriel de dimension finie et calculer $\dim(G)$.
3. Montrer que : $F + G = \mathbb{R}^4$
4. En déduire $\dim(F \cap G)$. Déterminer une base de $F \cap G$.
5. Montrer qu'en posant $\vec{e} = (6, 0, 1, 0)$, alors : $F \oplus \text{Vect}(\vec{e}) = \mathbb{R}^4$

*On note dans la suite p la projection sur F parallèlement à $\text{Vect}(\vec{e})$
et s la symétrie par rapport à $\text{Vect}(\vec{e})$ parallèlement à F .*

6. Expliciter l'application linéaire p .

Les 5/2 de MP doivent savoir répondre.

7. Expliciter une formule exprimant la symétrie s en fonction de p et déterminer s .

Les 5/2 de MP doivent savoir répondre.

Dans la suite, on note le commutant de p :

$$\mathcal{C} = \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4) \mid f \circ p = p \circ f \}.$$

8. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$. Montrer l'équivalence entre les deux points suivants :

$$(i) f \in \mathcal{C} \quad (ii) f(\text{Ker}(p)) \subset \text{Ker}(p) \text{ et } f(\text{Im}(p)) \subset \text{Im}(p).$$

Le sens (i) $\implies$ (ii) est facile

Mais même les 5/2 de MP ne savent pas faire (ii) $\implies$ (i)

En effet ils ont "zappé" le théorème :

les morphismes ϕ et ψ coïncident sur les ssev supplémentaires F et G alors $\phi = \psi$ sur $E = F \oplus G$

9. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{L}(\text{Ker}(p)) \times \mathcal{L}(\text{Im}(p)) \\ f &\longmapsto (f|_{\text{Ker}(p)}, f|_{\text{Im}(p)}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

10. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un ssev de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ de dimension finie et déterminer sa dimension.

Rappel/Complément : $F \times G$ est un ssev et $\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$

$\mathcal{L}(E, E')$ est un ssev et $\dim(\mathcal{L}(E, E')) = \dim(E) \cdot \dim(E')$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

On travaille dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

On adopte dans toute la suite les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (1, 2, 0, 1) \\ \vec{b} &= (3, -1, -1, 2) \\ \vec{c} &= (0, 0, 3, 4)\end{aligned}$$

$$F = \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} y - 2z + 5t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

1. Montrer que l'ensemble F est un espace vectoriel de dimension finie et calculer $\dim(F)$.

Comme $F = \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est génératrice

La famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est-elle libre ?

On suppose que $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}$

On va montrer que : $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\text{On a : } \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0} \iff \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 3\alpha - \beta = 0 \\ \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Donc la famille est libre

Conclusion : c'est une base de F et $\dim(F) = 3$

2. Montrer que l'ensemble G est un espace vectoriel de dimension finie et calculer $\dim(G)$.

$$\text{On a } \vec{u} \in G \iff \begin{cases} y - 2z + 5t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$\iff (x; y; z; t) = z(-3; 2; 1; 0) + t(6; -5; 0; 1)$$

$$\text{Donc } G = \text{vect}((-3; 2; 1; 0), (6; -5; 0; 1))$$

$$\text{La famille } \left(\underbrace{(-3; 2; 1; 0)}_{=\vec{d}}, \underbrace{(6; -5; 0; 1)}_{=\vec{e}} \right) \text{ est génératrice de } G \text{ et libre (car en escalier)}$$

Conclusion : c'est une base de G et $\dim(G) = 2$

3. Montrer que : $F + G = \mathbb{R}^4$

Comme $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de F et $(\vec{d}, \vec{e})$ est une base de G

On sait que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e})$ est une famille génératrice de $F + G$

Final classique On fait Gauss sur la famille et on en déduit que $\dim(F + G) = 4$

Conclusion : $F + G$ est un ssev de dimension 4 dans $\mathbb{R}^4$ Donc $F + G = \mathbb{R}^4$

Final plus astucieux On justifie que $\vec{d} \notin F$. En effet $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \neq 0$

Conclusion : $F + G$ est un ssev strictement plus "gros" que l'hyperplan F

Donc $F + G = \mathbb{R}^4$

4. En déduire $\dim(F \cap G)$.

Avec Grassmann, on obtient $\dim(F \cap G) = 1$

Déterminer une base de $F \cap G$.

On suppose que $\vec{u} = (x; y; z; t) \in F \cap G$

$$\text{Ainsi } \vec{u} = (x; y; z; t) \in F \iff \begin{cases} x = a + 3b \\ y = 3a - b \\ z = b + 3c \\ t = a + 2b + 4c \end{cases} \text{ et } \vec{u} = (x; y; z; t) \in G \iff \begin{cases} y - 2z + 5t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } \begin{cases} (3a - b) - 2(b + 3c) + 5(a + 2b + 4c) = 0 \\ (a + 3b) + (3a - b) + (b + 3c) - (a + 2b + 4c) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 8a + 7b + 3c = 0 \\ 3a + b - c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 17a + 10b + 0c = 0 \\ 3a + b - c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -17/10 \\ 47/10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : avec $a = 10$, $b = -17$ et $c = 47$, on a une solution

$$\text{On a en d\u00e9duit que } (x; y; z; t) \text{ avec } \begin{cases} x = a + 3b = -41 \\ y = 3a - b = 13 \\ z = b + 3c = 124 \\ t = a + 2b + 4c = 164 \end{cases} \text{ est un vecteur non nul de } F \cap G$$

Ainsi $(-41; 13; 124; 164)$ une base de $F \cap G$.

Les calculs sont faux!!! voir rouge!!!!

5. Montrer qu'en posant $\vec{e} = (6, 0, 1, 0)$, alors : $F \oplus \text{Vect}(\vec{e}) = \mathbb{R}^4$

On note $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{e})$ la r\u00e9union d'une base de F et une base de $\text{Vect}(\vec{e})$

On va montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^4$

On a $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{e}) = 1492 \neq 0$ donc la famille $\mathcal{B}$ est libre

elle est libre dans $\mathbb{R}^4$ et $\text{cardinal} = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$

Conclusion : $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{e})$, la r\u00e9union d'une base de F et une base de $\text{Vect}(\vec{e})$ est une base de $\mathbb{R}^4$

Ainsi on a bien $F \oplus \text{Vect}(\vec{e}) = \mathbb{R}^4$

On note dans la suite p la projection sur F parall\u00e8lement \u00e0 $\text{Vect}(\vec{e})$

et s la sym\u00e9trie par rapport \u00e0 $\text{Vect}(\vec{e})$ parall\u00e8lement \u00e0 F .

6. Expliciter l'application lin\u00e9aire p .

Soit $\vec{u} = (x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4$

On fait un dessin.

L'objectif est de trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} - \lambda \vec{e} \in F$

On aura alors $p(\vec{u}) = \vec{u} - \lambda \vec{e}$

On peut le faire avec le CL

mais il y a "plus astucieux"

$p(\vec{u}) = \vec{u} - \lambda \vec{e} \in F \iff$ la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, p(\vec{u}))$ est li\u00e9e

$$\iff \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, p(\vec{u})) = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & x - \lambda 6 \\ 2 & -1 & 0 & y \\ 0 & -1 & 3 & z - \lambda \\ 1 & 2 & 4 & t \end{vmatrix} = 0$$

On d\u00e9veloppe par rapport \u00e0 la derni\u00e8re colonne

$$\iff 23x - y + 28z - 21t - 166\lambda = 0$$

$$\iff \lambda = \frac{23x - y + 28z - 21t}{166}$$

Conclusion : $p(\vec{u}) = \vec{u} - \lambda \vec{e}$

$$= (x; y; z; t) - \frac{23x - y + 28z - 21t}{166} (6; 0; 1; 0)$$

7. Expliciter une formule exprimant la sym\u00e9trie s en fonction de p et d\u00e9terminer s .

On fait un dessin et on trouve : $id + s = 2p$, ainsi $s = 2p - id$

$$\text{Conclusion : } s(\vec{u}) = (x; y; z; t) - 2 \cdot \frac{23x - y + 28z - 21t}{166} (6; 0; 1; 0)$$

Dans la suite, on note le commutant de p :

$$\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4) \mid f \circ p = p \circ f\}.$$

8. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$. Montrer que $(i) f \in \mathcal{C} \iff (ii) f(\text{Ker}(p)) \subset \text{Ker}(p) \text{ et } f(\text{Im}(p)) \subset \text{Im}(p)$

Le sens $(i) \implies (ii)$?

On suppose que $f \circ p = p \circ f$. On démontre que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stable par f

Le sens $(ii) \implies (i)$?

Pour tout/chaque $\vec{u} \in \text{Ker}(p)$, on a $f \circ p(\vec{u}) = p \circ f(\vec{u})$

À faire

Pour tout/chaque $\vec{u} \in \text{Im}(p)$, on a $f \circ p(\vec{u}) = p \circ f(\vec{u})$

À faire

$$\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = \mathbb{R}^4$$

À faire

Conclusion : les morphismes $f \circ p$ et $p \circ f$ coïncident sur les ssev supplémentaires $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$
alors $f \circ p = p \circ f$ sur $\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$

9. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{L}(\text{Ker}(p)) \times \mathcal{L}(\text{Im}(p)) \\ f &\longmapsto (f|_{\text{Ker}(p)}, f|_{\text{Im}(p)}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Attention : On ne peut pas utiliser le thm du rang
car on ne connaît pas $\dim \mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ est ssev ?

Facile

$\mathcal{L}(\text{Ker}(p)) \times \mathcal{L}(\text{Im}(p))$ est un ssev ?

oui voir rappel/complément ci-dessous

Linéaire ?

À faire Facile/évident si on comprend les objets (piste noire!!!)

Injectif ? On suppose que $\Phi(f) = \mathcal{O}$

On a donc $f|_{\text{Ker}(p)} = \mathcal{O}$ et $f|_{\text{Im}(p)} = \mathcal{O}$

Ainsi les fonctions f et $\mathcal{O}$ coïncident sur $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$

Conclusion : $f = \mathcal{O}$ sur $\text{Ker } p \oplus \text{Im } p = \mathbb{R}^4$.

Surjectif ? Piste noire!!!

Soit $b \in \mathcal{L}(\text{Ker}(p)) \times \mathcal{L}(\text{Im}(p))$

CàD

Comme $\text{Ker } p \oplus \text{Im } p = \mathbb{R}^4$, il y a un morphisme (unique) qui prolonge
ainsi

10. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un ssev de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ de dimension finie et déterminer sa dimension.

Rappel/Complément : $F \times G$ est un ssev et $\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$

$\mathcal{L}(E, E')$ est un ssev et $\dim(\mathcal{L}(E, E')) = \dim(E) \cdot \dim(E')$

Comme Φ est un isomorphisme, on sait que : $\dim(\mathcal{D}\acute{e}part) = \dim(\mathcal{A}rriv\acute{e}e)$.

$$\begin{aligned} \text{Avec le rappel on a } \dim(\mathcal{C}) &= \dim(\mathcal{A}rriv\acute{e}e) = \dim(\mathcal{L}(\text{Ker}(p))) + \dim(\mathcal{L}(\text{Im}(p))) \\ &= \dim(\text{Ker}(p))^2 + \dim(\text{Im}(p))^2 \\ &= 1^2 + 3^2 \\ &= 10 \end{aligned}$$