

Exercice 1. [Correction]

On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices 3×3 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On considère $G = \{M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \text{ avec } a, b \in \mathbb{C}\}$ avec $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{O} = M_{0,0}$ la matrice nulle, $I = M_{1,0}$ la matrice identité et $A = M_{0,1}$

1. Calcul de $[M_{a,b}]^n$.

(a) Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et calculer sa dimension et une base.

(b) Montrer que G est stable par le produit.

(c) On note $B = A + I$ et $C = A - 2I$.

Montrer que la famille (B, C) est une base de G et calculer les coordonnées de $M_{a,b}$ dans cette base.

(d) Calculer $B^2, C^2, B.C$ et CB

En déduire $[M_{a,b}]^2$.

(e) Calculer $[M_{a,b}]^n$.

2. Diagonalisation de A et de $M_{a,b}$

(a) Montrer que $P(x) = \det(A - xI)$ est un polynôme de degré 3 et que $r = -1$ et $r = 2$ sont ses seules racines

(b) On considère E_1 l'ensemble des vecteurs $\vec{X} = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\vec{X} = -\vec{X}$

Montrer que E_1 est un ssev de dimension 2. On note $(\vec{C}_1, \vec{C}_2)$ une base E_1

(c) On considère E_2 l'ensemble des vecteurs $\vec{X} = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\vec{X} = 2\vec{X}$

Montrer que E_2 est un ssev de dimension 1. On note $\vec{C}_3$ une base E_2

(d) On note $P = (\vec{C}_1 | \vec{C}_2 | \vec{C}_3)$ la matrice 3×3 dont les vecteurs colonnes sont $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3$

Justifier que P est inversible et que $A.P = P.D$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(e) Justifier que $M_{a,b} = P.\mathcal{D}.P^{-1}$ avec $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}$ et calculer $[M_{a,b}]^n$

3. Application. On veut trouver les matrices $M \in G$ vérifiant $(M + I)^{2n} - I = \mathcal{O}$

On va utiliser la matrice $\mathcal{D}$ de la question Q2e.

(a) Montrer que : $(M + I)^{2n} - I = \mathcal{O} \iff (\mathcal{D} + I)^{2n} - I = \mathcal{O}$

(b) Déterminer les matrices $\mathcal{D}$ vérifiant $(\mathcal{D} + I)^{2n} - I = 0$.

(c) Déterminer les matrices M de G vérifiant $(M + I)^{2n} - I = \mathcal{O}$

Exercice 2. [Correction] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.

1. Un exemple. On considère la fonction p définie par

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, p(\vec{u}) = (3x - y - z, 2x - z, 4x - 2y - z)$$

- (a) Vérifier que $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et que $p \circ p = p$.
- (b) Est-ce que p est bijective ?
- (c) Déterminer une base et la dimension de $\ker p$.
- (d) Déterminer la dimension de $\text{Im} p$
et en utilisant $\text{Im}(p) = \text{vect}(L' \text{image d'une base de } \mathcal{D})$, donner une base de $\text{Im} p$.

2. On revient à la situation générale, CàD $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$.

On considère la fonction $f = \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}\text{id}$.

- (a) Justifier que $f \in \mathcal{L}(E)$.
- (b) On rappelle que $f^2 = f \circ f$. Montrer que : $f^2 = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\text{id}$.
En déduire que f est bijective et calculer f^{-1} .
- (c) On note $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ et on convient que $f^0 = \text{id}$.
 - i. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$ il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^n = a_n p + b_n \text{id}$.
et exprimer a_{n+1}, b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
 - ii. Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1 . Calculer b_n en fonction de n .
 - iii. Vérifier que la suite (a_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2. Calculer a_n en fonction de n .
- (d) Calculer $f^n = \left(\frac{3}{2}p - \frac{1}{2}\text{id}\right)^n$ avec la formule du binôme. (Rappel : $p^0 = \text{id}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, p^k = p$.)

Exercice 3. [Correction]

Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, CàD ϕ est une fonction linéaire de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\phi^n = \phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi$

On suppose que : $\phi^3 = \phi \circ \phi \circ \phi = id$

On considère les sous espaces vectoriels

$$F = \ker(\phi - id) \text{ et } G = \ker(\phi^2 + \phi + id) = \ker(\phi \circ \phi + \phi + id).$$

1. Généralités qui serviront dans tout le problème.

(a) Démontrer que : F et G sont stables par ϕ .

(b) Montrer que : $\vec{u} \in F \iff \phi(\vec{u}) = \vec{u}$.

2. Dédurre de Q.1.b. que $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

3. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{On considère } \vec{f} = \frac{1}{3} [\vec{u} + \phi(\vec{u}) + \phi^2(\vec{u})] \text{ et } \vec{g} = \frac{1}{3} [2\vec{u} - \phi(\vec{u}) - \phi^2(\vec{u})]$$

(a) Vérifier que : $\vec{f} \in F$ et que $\vec{g} \in G$.

(b) En déduire que $F + G = \mathbb{R}^2$

(c) On suppose que : $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$ avec $\vec{f} \in F$ et $\vec{g} \in G$.

Montrer que $\vec{f}$, $\vec{g}$ et $\phi(\vec{g})$ sont solutions de 3 équations et qu'au final $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont forcément égaux aux valeurs que je donne ci-dessus.

4. On suppose que $\dim F = 2$.

Justifier que $F = \mathbb{R}^2$ puis que $\phi = id$.

5. On suppose que $\dim F = 0$.

Soit $\vec{u} \in G$ un vecteur **non nul**.

On va démontrer que : $(\vec{u}, \phi(\vec{u}))$ est base de $\mathbb{R}^2$.

On suppose que : $\phi(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{u}$.

> "traduire" $\phi(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{u}$ et utiliser $\vec{u} \in G$ pour trouver une absurdité.

> Conclure.

6. Démontrer que $\dim F = 1$ est Absurde.

Calculer $\dim(G)$ avec Grassmann, prendre $\vec{g}$ une base de G , justifier que $\phi(\vec{g}) \in G$ puis oups

Exercice 4. [Correction] Soit n un entier.

On considère la fonction ϕ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \phi(P) = 2(X^2 + X + 1)P' - n(2X + 1)P$

1. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$, CàD que ϕ est en endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit P un polynôme non nul dans $\ker(\phi)$
Montrer que : $\deg(P) = n$.
3. Soit P_1 et P_2 deux polynômes non nul dans $\ker \phi$
 - (a) Montrer qu'il existe λ tel que $P_1 - \lambda P_2 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
 - (b) En déduire que $P_1 - \lambda P_2 = 0$
 - (c) En déduire que $\ker \phi$ est soit $\{\vec{0}\}$, soit une droite vectoriel.
4.
 - (a) Résoudre l'équation différentielle : $2(x^2 + x + 1)y' - n(2x + 1)y = 0$.
 - (b) Déterminer $\ker(f)$.

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^3$

Soit ϕ un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$.

On convient que $\phi^0 = id_E$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, \phi^{n+1} = \phi \circ \phi^n = \phi^n \circ \phi$.

On notera $\mathcal{O}$ l'endomorphisme nul.

1. Soit ϕ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et soit i et j deux entiers naturels.
On considère fonction f de $\mathcal{D} = \ker(\phi^{i+j})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$$\forall \vec{u} \in \ker(\phi^{i+j}), f(\vec{u}) = \phi^j(\vec{u})$$
 - (a) Montrer que $\ker f \subset \ker \phi^j$
 - (b) Montrer que $\text{Im } f \subset \ker \phi^i$.
 - (c) En déduire que $\dim(\ker \phi^{i+j}) \leq \dim(\ker \phi^i) + \dim(\ker \phi^j)$.
2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $g^3 = 0$ et $\dim \text{Im } g = 2$.
 - (a) Montrer que $\dim(\ker g^2) = 2$.
(On pourra utiliser deux fois la question 1.c)
 - (b) Une bonne base.
 - i. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{a}$ tel que $\overrightarrow{g^2(a)} \neq \vec{0}$.
 - ii. Montrer que la famille $(\overrightarrow{g^2(a)}, \overrightarrow{g(a)}, \vec{a})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h^2 = 0$ et $\dim \text{Im}(h) = 1$.
 - (a) Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{b}$ tel que $h(\vec{b}) \neq \vec{0}$.
 - (b) Justifier qu'il existe $\vec{c} \in \ker(h)$ tel que $(\overrightarrow{h(b)}, \vec{c})$ est une base de $\ker(h)$.
 - (c) Montrer que la famille $(\vec{b}, \overrightarrow{h(b)}, \vec{c})$ est une base $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. [Correction]

Problème : Exponentielle de matrices

Le but du sujet est d'étudier l'exponentielle de matrices, réelles ou complexes.

$$\text{Si } A \in M_p(\mathbb{R}) \text{ on définit, lorsque cette limite existe, } E(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n} A \right)^n$$

Dans tout le sujet, p désigne un entier naturel non nul.

- $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}_p[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré au plus p .
- $GL_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $M_p(\mathbb{R})$.
- $O_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients dans $\mathbb{R}$ d'ordre p . Plus précisément :

$$O_p(\mathbb{R}) = \{ M \in GL_p(\mathbb{R}) \mid M^T \times M = I_p \}$$

On rappelle (ou admet) que :

- On dit que les polynômes $P_1, \dots, P_{41}$ sont premiers entre eux Ssi ils n'ont pas de racine commune.
De plus si/lorsque les polynômes sont premiers entre eux, alors la relation de Bézout est valide (admis)

- On dit qu'un polynôme $P \neq 0$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples

$$\text{Ssi on peut écrire } P = \prod_{i=1}^{\deg(P)} (X - r_i) \text{ et les racines } r_i \in \mathbb{R} \text{ et } 2 \text{ à } 2 \neq 0$$

- Le produit scalaire usuel se calcule avec un produit matriciel,

$$\text{CàD Pour tout } a = (a_1; a_2; \dots; a_p) \in \mathbb{R}^p \text{ et } b = (b_1; b_2; \dots; b_p) \in \mathbb{R}^p, \text{ on a } a.b = \sum_{k=1}^p a_k.b_k = \vec{A}^T . \vec{B}$$

- On dit qu'une matrice M de $M_p(\mathbb{R})$ est diagonalisable,
s'il existe une matrice $P \in GL_p(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, diagonale telles que $M = P.D.P^{-1}$

- On dit qu'une suite de complexe $(z_n) = (a_n + i b_n)$ converge vers $z = a + i b$
Ssi la suite (a_n) converge vers a et la suite (b_n) converge vers b .

$$\text{Formellement : } (z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \quad \text{Ssi} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \text{ et } b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$$

- On dit qu'une suite de matrices $(M_n) = (m_{i,j}(n))$ de $M_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice $M = (m_{i,j})$
Ssi la suite (M_n) converge coefficients par coefficients vers ceux de M .

$$\text{Formellement : } (M_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M \quad \text{Ssi} \quad \forall i, j, m_{i,j}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m_{i,j}$$

Conseil : Mettre des flèches sur les vecteurs colonnes ne peut pas nuire.

I. Questions préliminaires.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. On note $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*, n > -a$.

Déterminer le module et un argument de $\left(1 + \frac{z}{n} \right)$, puis de $\left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$ en fonction de a, b et n et, si nécessaire, la fonction arctan.

3. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = e^z$.

II. Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2 ou 3.

1. Matrices antisymétriques d'ordre 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. *Kulture* : A est une matrice antisymétrique car $A^T = -A$

(a) Déterminer un nombre $\beta_n \in \mathbb{R}^{+*}$ et le nombre réel $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$I_2 + \frac{1}{n}A = \beta_n \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$$

(b) En déduire que $E(A)$ existe et que $E(A) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

On pourra conjecturer et calculer $\begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}^m$

2. Matrices antisymétriques d'ordre 3.

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ une matrice non-nulle. *Kulture* : B est une matrice antisymétrique car $B^T = -B$

(a) Montrer que $\frac{1}{2} \text{tr}(B^T \times B)$ est un nombre strictement positif.

On note $\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(B^T \times B)}$.

(b) On note $X = \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} ac \\ -ab \\ -b^2 - c^2 \end{pmatrix}$.

i. Calculer BX, BY et BZ .

On exprimera les résultats des calculs en fonctions de X, Y, Z et β

ii. Calculer $X^T \times X, Y^T \times Y, Z^T \times Z$ et $X^T \times Y, X^T \times Z, Y^T \times Z$.

iii. On suppose que $b^2 + c^2 > 0$. On note $x = \frac{1}{\beta}X, y = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}}Y$ et $z = \frac{1}{\beta\sqrt{b^2 + c^2}}Z$.

On note $P = (X|Y|Z)$ (matrice composée de trois colonnes). Calculer $B \times P$.

iv. Et montrer que $P \in O_3(\mathbb{R})$; en déduire une expression simple de P^{-1} .

(c) Déduire des questions précédentes l'existence de P de $O_3(\mathbb{R})$ et un réel $\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(B^T \times B)}$ tels que

$$B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(d) Montrer que $E(B)$ existe, on donnera son expression en fonction de P et de β .

III. Exponentielle de matrices diagonalisables.

1. Cas de matrices diagonales.

Soit $D \in M_p(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.

On suppose, pour fixer les notations, que $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $E(D)$ existe et que $E(D) \in GL_p(\mathbb{R})$.

On donnera l'expression explicite de $E(D)$ en fonction des coefficients λ_i .

(b) Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$

Indication : On pourra utiliser un morphisme.

(c) Exprimer $E(D)$ en fonction de $Q(D)$.

(d) Montrer que si D_1 et D_2 sont diagonales, alors $E(D_1 + D_2) = E(D_1) \times E(D_2)$.

(e) Calculer $E(xI_p)$ ($x \in \mathbb{R}$), $E(0_p)$ (exponentielle de la matrice nulle), en déduire $E(D)^{-1}$.

2. Existence et propriétés de $E(A)$ lorsque A est diagonalisable.

Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable (cf. définition en début d'énoncé).

On suppose, pour fixer les notations, que $A = P \times D \times P^{-1}$, où D est diagonale.

(a) Montrer que pour tout polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$T(A) = P \times T(D) \times P^{-1}$$

(b) Montrer que $E(A)$ existe.

On donnera l'expression explicite de $E(A)$ en fonction de celle de $E(D)$, de P et P^{-1} .

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que

$$E(xI_p + A) = e^x E(A)$$

3. Critère de diagonalisation

On cherche une condition nécessaire et suffisante pour affirmer qu'une matrice est diagonalisable. Ce critère nous servira pour répondre aux questions IV.4 et VI.2.(e).iii.

(a) On suppose que A est diagonalisable.

Montrer qu'il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule A .

(b) On suppose qu'il existe $T \in \mathbb{R}[X]$, scindé, à racines simples tel que $T(A) = 0$.

On suppose, pour fixer les notations, que $T = \prod_{i=1}^r (X - \mu_i)$, avec $\mu_i \neq \mu_j$ dès que $i \neq j$.

On note, pour $i \in \mathbb{N}_r$, $E_i = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \mu_i X\}$ et $T_i = \prod_{j \neq i} (X - \mu_j)$.

i. Montrer qu'il existe $U_1, \dots, U_r \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sum_{i=1}^r U_i T_i = 1$.

ii. En déduire : pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $X = \sum_{i=1}^r [U_i(A) T_i(A)] X$, puis $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \sum_{i=1}^r E_i$

iii. On note, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $\mathcal{B}_i = (X_{1,i}, \dots, X_{a_i,i})$ une base de E_i , puis

$$P = (X_{1,1} \mid \cdots \mid X_{a_1,1} \mid X_{1,2} \mid \cdots \mid X_{a_2,2} \mid \cdots \mid X_{1,r} \mid \cdots \mid X_{a_r,r})$$

Montrer que P est inversible.

iv. Montrer que $P^{-1} \times A \times P$ est une matrice diagonale (que l'on donnera).

On pourra faire le calcul matriciel $A \times P$ par blocs colonne et reconnaître un calcul de la forme $P \times D \dots$

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir affirmer que A est diagonalisable.

IV. Exponentielle de la somme.

Soient $A, B \in M_p(\mathbb{R})$ deux matrices diagonalisables.

On suppose que A et B commutent.

Quitte à multiplier par des matrices d'opérations élémentaires à gauche et à droite,

il est possible de trouver $P_1 \in GL_p(\mathbb{R})$ telle que $A = P_1 \times D \times P_1^{-1}$,

où D est de la forme
$$\begin{pmatrix} d_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & \\ 0 & d_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_r I_{n_r} \end{pmatrix} \text{ où } d_i \neq d_j$$

(les 0 qui figurent dans cette matrice sont des matrices rectangulaires nulles).

On note alors $C = P_1^{-1} \times B \times P_1$.

1. Montrer que C est diagonalisable et que C et D commutent.

2. En déduire que C est de la forme
$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_r \end{pmatrix} \text{ où pour tout réel } i \in \mathbb{N}_r, C_i \text{ est une matrice carrée d'ordre } n_i.$$

3. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}_r, C_i$ est diagonalisable.

4. Conclure qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

5. En déduire que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$.

V. Exponentielle de matrices nilpotentes.

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (on dit que A est nilpotente d'ordre k).

Soit également $B \in M_p(\mathbb{C})$ (on ne suppose rien sur B).

1. Justifier qu'il existe un vecteur $\vec{X} \in \mathbb{R}^p$ tel que $A^{k-1}\vec{X} \neq \vec{0}$

2. Montrer que la famille $(\vec{X}, A\vec{X}, A^2\vec{X}, \dots, A^{k-1}\vec{X})$ est libre

En déduire que $k \leq p$.

3. Montrer que $E(A)$ existe.

On pourra appliquer la formule du binôme de Newton, puis passer à la limite et obtenir un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(A) = E(A)$

4. Soit $B \in M_p(\mathbb{C})$. On suppose que A et B commutent et que $E(B)$ existe.

On admet que, pour tout entier i compris entre 1 et p ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n} B \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n} B \right)^{n-i}$$

Montrer que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B)$.

5. Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$.

6. Montrer que $E(A) - I_p$ est nilpotente.

VI. Cas général $\mathbb{C}$.

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$P_n(X) = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n \in \mathbb{C}[X]$$

1. Polynôme minimal

(a) On définit $\mathbb{C}[A] = \text{vect} \{A^k, k \in \mathbb{N}\}$.

Montrer que $\mathbb{C}[A]$ est un espace vectoriel de dimension finie.

On note $r = \dim(\mathbb{C}[A])$.

(b) En déduire que $I_A = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(A) = 0\}$, l'ensemble des polynômes annulateurs de A , est non réduit à $\{0\}$.

(c) On note $m = \min \{\deg(P), P \in I_A, P \neq 0\}$ et $\Pi \in I_A$, unitaire tel que $\deg \Pi = m$.

Montrer que $I_A = \Pi \cdot \mathbb{C}[X]$ (on pourra faire une division euclidienne).

(d) Quel rapport entre r et m ?

Π ainsi définie est unique, on l'appelle le polynôme minimal de A , on le note plutôt Π_A .

2. Décomposition de Dunford

On se place dans le corps $\mathbb{C}$. On suppose que $\Pi_A = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{m_i}$

(a) Soit $C = \Pi_A \wedge \Pi'_A$, le PGCD de Π_A et de Π'_A .

Exprimer Π'_A . En déduire une expression sous forme de produits de C

(b) On note S tel que $\Pi_A = S \times C$.

Exprimer simplement S , en fonction des λ_i . En déduire que $S \wedge S' = 1$

(c) Montrer également qu'il existe $\mu \in \mathbb{N}$ tel que $\Pi_A \mid S^\mu$.

(d) En déduire qu'il existe U et $V \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$U\Pi_A + VS' = 1$$

puis que $V(A) \times S'(A) = I_p$.

(e) On définit par récurrence, si possible selon la méthode de Newton :

$$X_0 = A \quad \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = X_n - S(X_n) \times [S'(X_n)]^{-1}$$

i. Montrer, en une seule récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n \in \mathbb{C}[A], S'(X_n) \text{ est inversible, } [S'(X_n)]^{-1} \in \mathbb{C}[A] \text{ et } S(X_n) \in S^{2^n}(A) \cdot \mathbb{C}[A]$$

On pourra calculer $S'(X_{n+1}) - S'(X_n) \dots$

ii. Montrer que (X_n) est stationnaire. On note $K = \min \{n \in \mathbb{N} \mid X_{n+1} = X_n\}$.

iii. Montrer que X_K est diagonalisable, $N_K = A - X_K$ est nilpotente et que X_K et N_K commutent.

On dit que l'on a obtenu la décomposition de Dunford de la matrice A :

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), \exists D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \text{ diagonalisable, } N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \text{ nilpotente telles que } A = D + N \text{ et } D \times N = N \times D$$

3. Montrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, admet une exponentielle $E(A)$.

Comment calculer $E(A)$, en exploitant la décomposition de Dunford ?

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) 1. Calcul de $[M_{a,b}]^n$.

- (a) Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et calculer sa dimension et une base.

On a

$$M \in G \iff M = aI + bJ \quad \text{avec } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff M \in \text{vect}(I, J)$$

Donc $G = \text{vect}(I, J)$

Donc G est un ssev et (I, J) est une famille génératrice.

De plus la famille (I, J) est libre (car non //) donc c'est une base de G et $\dim(G) = 2$

- (b) Montrer que G est stable par le produit.

On a

$$\begin{aligned} M_{a,b}.M_{a',b'} &= (aI + bJ).(a'I + b'J) \\ &= aa'I + (ab' + ba')J + bb'J^2 \\ \text{Or } J^2 &= 2I + J \\ &= (aa' + 2bb')I + (ab' + ba' + bb')J \in \text{Vect}(I, J) = G \end{aligned}$$

- (c) On note $B = A + I$ et $C = A - 2I$.

Montrer que la famille (B, C) est une base de G et calculer les coordonnées de $M_{a,b}$ dans cette base.

B, C sont des CL donc $\in G$

(B, C) est libre car $\neq 0$ et non //

cardinal=2 et $\dim(G) = 2$

Conclusion : C'est une base

- (d) Calculer $B^2, C^2, B.C$ et CB

On trouve $B^2 = 3.B, C^2 = (-3).C, B.C = \mathcal{O}$ et $CB = \mathcal{O}$

En déduire $[M_{a,b}]^2$.

$$\begin{aligned} \text{On a } [M_{a,b}]^2 &= (\lambda B + \mu C)^2 \\ &= \lambda B^2 + \lambda\mu BC + \lambda\mu CB + \mu C^2 \\ &= \lambda 3B + \mu(-3)C \end{aligned}$$

- (e) Calculer $[M_{a,b}]^n$.

On démontre par récurrence, $[M_{a,b}]^n = \lambda(3)^n B + \mu(-3)^n C$

2. Diagonalisation de A et de $M_{a,b}$

- (a) Montrer que $P(x) = \det(A - xI)$ est un polynôme de degré 3 et que $r = -1$ et $r = 2$ sont ses seules racines

- (b) On considère E_1 l'ensemble des vecteurs $\vec{X} = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\vec{X} = -\vec{X}$

Montrer que E_1 est un ssev de dimension 2. On note $(\vec{C}_1, \vec{C}_2)$ une base E_1

- (c) On considère E_2 l'ensemble des vecteurs $\vec{X} = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\vec{X} = 2\vec{X}$

Montrer que E_2 est un ssev de dimension 1. On note $\vec{C}_3$ une base E_2

- (d) On note $P = (\vec{C}_1 | \vec{C}_2 | \vec{C}_3)$ la matrice 3×3 dont les vecteurs colonnes sont $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3$

Justifier que P est inversible et que $A.P = P.D$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- (e) Justifier que $M_{a,b} = P.\mathcal{D}.P^{-1}$ avec $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}$ et calculer $[M_{a,b}]^n$

Comme P est inversible et $A.P = P.D$, on a $A = P.D.P^{-1}$

Ainsi on a $M_{a,b} = aI + bA$

$$\begin{aligned} &= aI + bP.D.P^{-1} \\ &= aP.I.P^{-1} + bP.D.P^{-1} \\ &= P.(aI + b.D).P^{-1} \\ &= P.\mathcal{D}.P^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Et } [M_{a,b}]^n = P.\mathcal{D}^2.P^{-1}$$

(f) Application. On veut trouver les matrices $M \in G$ vérifiant $(M + I)^{2n} - I = \mathcal{O}$

On va utiliser la matrice $\mathcal{D}$ de la question Q2e.

i. Montrer que : $(M + I)^{2n} - I = \mathcal{O} \iff (\mathcal{D} + I)^{2n} - I = \mathcal{O}$

À faire. Voir la question ci-dessus

ii. Déterminer les matrices $\mathcal{D}$ vérifiant $(\mathcal{D} + I)^{2n} - I = 0$.

On a

$$(\mathcal{D} + I)^{2n} - I = 0 \iff \left[\begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{2n} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} (a+2b+1)^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & (a-b+1)^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & (a-b+1)^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} (a+2b+1)^{2n} = 1 \\ (a-b+1)^{2n} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+2b+1 = \omega_k \\ a-b+1 = \omega_l \end{cases} \quad \text{avec } \omega_k, \omega_l \text{ des racines } (2n)\text{-ième de l'unité}$$

On en déduit $a = (1/3)\omega_k + (2/3)\omega_l - 1$ et $b = (1/3)\omega_k - (1/3)\omega_l$

iii. Déterminer les matrices M de G vérifiant $(M + I)^{2n} - I = \mathcal{O}$

On sait que $M = P.\mathcal{D}.P^{-1}$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.

1. Un exemple. On considère la fonction p définie par

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, p(\vec{u}) = (3x - y - z, 2x - z, 4x - 2y - z)$$

(a) On a classiquement $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, p(\vec{u}) = A\vec{u}$.

De plus $p \circ p = p \iff \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, [p \circ p](\vec{u}) = p(\vec{u})$

On a

$$[p \circ p](\vec{u}) = p(p(\vec{u})) = p(A\vec{u}) = A.A.\vec{u}$$

On calcule A^2 et on trouve $A^2 = A$ donc on a bien $p \circ p = p$

(b) Comme $\det(A) = \dots = 0$ la fonction p n'est pas bijective.

(c) On a

$$\vec{u} \in \ker p \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 4x - 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\ker p$ est le droite vectoriel dirigée par $(1, 1, 2)$

(d) On a

$$\text{Im } p = \text{vect} \left(p(\vec{i}), p(\vec{j}), p(\vec{k}) \right) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On fait Gauss et on déduit que $\text{Im } p$ est un plan.

Contrôle de cohérence : On a trouvé que $\dim(\ker p) = 1$ et $\dim \text{Im } p = 2$.

Ceci est cohérent avec la formule du rang.

2. On considère la fonction $f = \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}\text{id}$.

(a) Comme $f = \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}\text{id}$, f est une CL d'endomorphisme donc c'est un endomorphisme.

(b) Pour calculer $f \circ f$, on utilise $p^2 = p$ et aussi que pour les endos la composée se distribue.

$$f \circ f = \left(\frac{3}{2}p - \frac{1}{2}\text{id} \right) \circ \left(\frac{3}{2}p - \frac{1}{2}\text{id} \right) = \dots$$

Pour les morphismes, la composée se distribue

$$= \left(\frac{3}{2} \right)^2 p^2 - 2 \frac{3}{2} \frac{1}{2} p + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \text{id}$$

$$= \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2} \right) p + \frac{1}{4} \text{id}$$

$$= \frac{3}{4}p + \frac{1}{4}\text{id}$$

De plus

$$\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\text{id} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}p - \frac{1}{2}\text{id} \right) + \frac{1}{2}\text{id} = \frac{3}{4}p + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \text{id} = \frac{3}{4}p + \frac{1}{4}\text{id}$$

Conclusion : $f \circ f = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\text{id}$.

(c) Étude de $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ et $f^0 = \text{id}$.

i. On va montrer par récurrence

$$H < n > : \text{il existe } (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f^n = a_n p + b_n \text{id}$$

Initialisation ?

Comme $f^0 = \text{id}$ et $f^1 = \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}\text{id}$, on a $a_0 = 0, b_0 = 1, a_1 = \frac{3}{2}, b_1 = -\frac{1}{2}$

$H < n > \implies H < n+1 > ?$ On a

$$f^{n+1} = f^n \cdot f = (a_n p + b_n \text{id}) \left(\frac{3}{2}p - \frac{1}{2}\text{id} \right)$$

$$= \frac{3}{2}a_n p^2 + \left(\frac{3}{2}b_n - \frac{1}{2}a_n \right) p - \frac{1}{2}b_n \text{id}$$

$$\text{Or } p^2 = p$$

$$= \left(a_n + \frac{3}{2}b_n \right) p + \left(-\frac{1}{2}b_n \right) \text{id}$$

Donc $H < n + 1 >$ est vraie et on a

$$a_{n+1} = a_n + \frac{3}{2}b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n$$

ii. b_n se calcule facilement et b_n se calcule à la mode géométrique.

iii. Calculer $f^n = \left(\frac{3}{2}p - \frac{1}{2}id \right)^n$ avec la formule du binôme. (Attention : $p^0 = id$.)

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, CàD ϕ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, linéaire.

On suppose que $\phi^3 = \phi \circ \phi \circ \phi = id$

On considère

$$F = \ker(\phi - id) \quad \text{et} \quad G = \ker(\phi^2 + \phi + id).$$

1. Généralités

(a) Un peu long mais facile.

(b) Évident.

2. On suppose que $\vec{u} \in F \cap G$

On veut montrer que $\vec{u} = \vec{0}$

Comme $\vec{u} \in F$, on a $\phi(\vec{u}) = \vec{u}$ et donc $\phi^2(\vec{u}) = \vec{u}$

Comme $\vec{u} \in G$, on a

$$\begin{aligned} \vec{0} &= [\phi^2 + \phi + id](\vec{u}) = \phi^2(\vec{u}) + \phi(\vec{u}) + id(\vec{u}) \\ &= \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\vec{u} \end{aligned}$$

$$\text{Enfin } 3\vec{u} = \vec{0} \implies \vec{u} = \vec{0}.$$

3. Une somme.

(a) Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$.

→ On a facilement même si c'est lours

$$\phi\left(\frac{1}{3}[\vec{u} + \phi(\vec{u}) + \phi^2(\vec{u})]\right) = \dots = \frac{1}{3}[\vec{u} + \phi(\vec{u}) + \phi^2(\vec{u})] \quad \text{car } \phi^3 = id$$

$$[\phi^2 + \phi + id](\vec{u}) = \dots = \vec{0} \quad \text{car } \phi^3 = id$$

→ Il est clair que $\vec{f} + \vec{g} = \vec{u}$

(b) Il est évident que $F + G \subset E$. De plus $E \subset F + G$ C'est exactement la conclusion des calculs de la question précédente.

(c) Les 3 équations sont :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{f} + \vec{g} \\ \phi(\vec{u}) &= \dots = \vec{f} + \phi(\vec{g}) \\ \phi^2(\vec{u}) &= \dots = \vec{f} + \phi^2(\vec{g}) = \vec{f} - \vec{g} - \phi(\vec{g}) \end{aligned}$$

On résout le système d'inconnue $\vec{f}$, $\vec{g}$ et $\phi(\vec{g})$.

4. On suppose que $\dim F = 2$.

(a) On applique la formule $\dim(F \hat{+} G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.

Ainsi $\dim G = 0$ donc $G = \{\vec{0}\}$.

(b) Comme $\dim F = 2$, on a $\phi - id = 0$. Donc $\phi = id$.

5. On suppose que $\dim F = 0$.

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur qcq, **non nul**.

> On applique la formule $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.

Ainsi $\dim G = 2$ et $G \subset \mathbb{R}^2$ donc $G = \mathbb{R}^2$.

$$\text{Ainsi } \vec{u} \in \mathbb{R}^2 = G$$

> On suppose que $\phi(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{u}$, donc on peut écrire $\phi(\vec{u}) = \alpha \vec{u}$

> Comme $\vec{u} \in G$, on a

$$\vec{0} = [g^2 + g + id](\vec{u}) = (\alpha^2 + \alpha + 1)\vec{u} \implies \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

Or l'équation $X^2 + X + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $\Delta = -3 < 0$ donc c'est absurde α n'existe pas!!!

Conclusion : La famille $(\vec{u}, \phi(\vec{u}))$ est libre car non colinéaire et $\text{card} = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$

6. Démontrer par une RA que $\dim F = 1$ est Absurde.

On suppose que $\dim F = 1$.

> Avec la formule $\dim(F + G) = \dots$, on a forcément $\dim G = 1$

> Soit $\vec{u} \in G$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Comme $\dim G = 1$, on a $G = \text{vect}(\vec{u})$

Comme G est stable par ϕ on a forcément

$$\phi(\vec{u}) \in G = \text{vect}(\vec{u})$$

On peut écrire $\phi(\vec{u}) = \alpha \vec{u}$

> On reprend le raisonnement précédent pour conclure que α n'existe pas!!! Oups.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. On doit démontrer linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

→ Classique facile.

→ A valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$?

Soit $P = P(X) \in \text{Départ} = \mathbb{R}_n[X]$

On va calculer $\phi(P)$ et vérifier que $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

Comme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $P = P(X) = a_n X^n + \dots$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \phi(P) &= 2(X^2 + X + 1)P'(X) - n(2X + 1)P(X) \\ &= 2(X^2 + X + 1)[na_n X^{n-1} + \dots] - n(2X + 1)[a_n X^n + \dots] \\ &= X^{n+1} \left[\underbrace{2na_n - 2na_n}_{=0} \right] + \dots \in \mathbb{R}_n[X] \text{ Fini.} \end{aligned}$$

2. Étude de $\ker \phi$.

(a) Soit P un polynôme $\neq 0$ de $\mathbb{R}_n[X]$, il a un degré que je note $\alpha \leq n$

On va calculer $\phi(P)$ et lire son degré

On peut écrire $P = P(X) = \underbrace{a}_{\neq 0} X^\alpha + \dots$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \phi(P) &= 2(X^2 + X + 1)P'(X) - n(2X + 1)P(X) \\ &= 2(X^2 + X + 1)[\alpha a X^{\alpha-1} + \dots] - n(2X + 1)[a X^\alpha + \dots] \\ &= X^{\alpha+1} 2a[\alpha - n] + \dots \end{aligned}$$

Donc

Si/Lorsque $\deg(P) = \alpha < n$ alors $2a[\alpha - n] \neq 0$ et $\deg \phi(P) = \alpha + 1 = (\deg P) + 1$

Si/Lorsque $\deg(P) = \alpha < n$ alors $2a[\alpha - n] \neq 0$ et $\deg \phi(P) \underset{\text{Strict}}{<} \alpha + 1 = (\deg P) + 1$

(b) D'après le calcul précédent, on a

Si $\deg(P) \neq n$ alors $\deg \phi(P) = (\deg P) + 1 \geq 0$

Donc $\phi(P)$ n'est pas le polynôme nul et $P \notin \ker \phi$

Par contraposée. Si $P \in \ker \phi$ alors $\deg(P) = n$

(c) Soit P_1 et P_2 deux polynômes non nul dans $\ker \phi$

> On peut écrire à cause de 2.b

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1(X) = \alpha X^n + \dots \text{ et } \alpha \neq 0 \\ P_2 &= P_2(X) = \beta X^n + \dots \text{ et } \beta \neq 0 \end{aligned}$$

On a donc $A(X) = P_1(X) - \frac{\alpha}{\beta} P_2(X) = \dots \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

> Or $\ker \phi$ est un ssev donc

$$\left. \begin{array}{l} P_1, P_2 \in \ker \phi \\ \ker \phi \text{ est un ssev} \end{array} \right\} \Rightarrow A = \dots P_1 + \dots P_2 \in \ker \phi$$

Ainsi A est un polynôme de $\ker \phi$ et $\deg A \leq n - 1$, donc forcément $A = 0$ (A cause de 2.b).

Conclusion les éléments de $\ker \phi$ sont Soit tous nuls, Soit tous colinéaires

CàD $\ker \phi$ est soit $\left\{ \vec{0} \right\}$, soit une droite

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

Réponse à quelques questions

Calcul de e^z

Soit $n \in \mathbb{N}^*, n > -a$.

Déterminer le module et un argument de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)$

$$\text{On a } A = 1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{a + ib}{n} = \left(1 + \frac{a}{n}\right) + i \left(\frac{b}{n}\right)$$

Comme $n > -a$, on $\operatorname{Re}(A) > 0$ donc on peut choisir l'argument $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\text{On a } |A| = \left|1 + \frac{z}{n}\right| = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{2a}{n}[1 + o(1)]}$$

$$> \frac{A}{|A|} = \frac{\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{|A|} + i \frac{\frac{b}{n}}{|A|} = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \text{ on a donc } \tan \theta = \frac{\frac{b}{n}}{1 + \frac{a}{n}}$$

$$\text{conclusion : } \theta_n = \arctan\left(\frac{\frac{b}{n}}{1 + \frac{a}{n}}\right) = \arctan \frac{b}{n+a} \text{ car } \theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

puis de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n et, si nécessaire, la fonction $\arctan$.

$$\text{On a } \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = (|A| e^{i\theta_n})^n = |A|^n e^{in\theta_n}$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

$$\begin{aligned} \text{On a } |A|^n &= \left[1 + \frac{2a}{n}[1 + o(1)]\right]^{n/2} = \exp\left[\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{2a}{n}[1 + o(1)]\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{n}{2} \frac{a}{2n}[1 + o(1)]\right] \\ &= \exp[a[1 + o(1)]] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > n\theta_n &= n \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right) = n \arctan\left(\frac{b}{n}[1 + o(1)]\right) \\ &= n \frac{b}{n}[1 + o(1)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \end{aligned}$$

$$\text{conclusion : } \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = |A|^n e^{in\theta_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^a e^{ib} = e^z$$

Matrices antisymétriques d'ordre 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que A est une matrice antisymétrique car $A^T = -A$

1. Déterminer un nombre $\beta_n \in \mathbb{R}^{+*}$ et le nombre réel $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tel que $I_2 + \frac{1}{n}A = \beta_n \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$

$$\text{On a } I_2 + \frac{1}{n}A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

On cherche θ_n et β_n tel que $\beta_n \cos(\theta_n) = 1$ et $\beta_n \sin(\theta_n) = \frac{a}{n}$

Ca ressemble à des complexes!!! idée $1 + i\frac{a}{n} = \beta_n \cos(\theta_n) + i\beta_n \sin(\theta_n) = \frac{a}{n} = \beta_n e^{i\theta_n}$

On fait le même raisonnement que ci-dessus et on trouve $\beta_n = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2}$ et $\theta_n = \arctan \frac{a}{n}$

2. En déduire que $E(A)$ existe et que $E(A) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

On démontre facilement par récurrence que $\begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \cos(m\theta_n) & -\sin(m\theta_n) \\ \sin(m\theta_n) & \cos(m\theta_n) \end{pmatrix}$

On a donc $\beta_n = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + 0} = 1$

$$n\theta_n = n \arctan \frac{a}{n} = a \cdot \frac{a}{n} [1 + o(1)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

$$\text{Conclusion : } \left(I + \frac{A}{n}\right)^n = \beta_n \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{CàD } E(A) \text{ existe et que } E(A) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Matrices antisymétriques d'ordre 3.

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ une matrice non-nulle.

1. Montrer que $\frac{1}{2} \text{tr}(B^T \times B)$ est un nombre strictement positif.

On trouve facilement $\frac{1}{2} \text{tr}(B^T \times B) = a^2 + b^2 + c^2$

Comme $B \neq \mathcal{O}$, les coefficients a, b, c sont non tous nul donc $a^2 + b^2 + c^2 > 0$

2. On note $X = \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} ac \\ -ab \\ -b^2 - c^2 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer BX, BY et BZ .

On trouve : $B\vec{X} = \vec{O}, B\vec{Y} = \vec{Z}$ et $B\vec{Z} = (a^2 + b^2 + c^2)\vec{Y}$

- (b) Calculer $X^T \times X, Y^T \times Y, Z^T \times Z$ et $X^T \times Y, X^T \times Z, Y^T \times Z$.

On trouve $X^T \times X = a^2 + b^2 + c^2$

$$Y^T \times Y = b^2 + c^2$$

$$Z^T \times Z = a^2 c^2 + b^2 a^2 + (b^2 + c^2)^2 = (b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$X^T \times Y = 0$$

$$X^T \times Z = 0$$

$$Y^T \times Z = 0$$

- (c) On suppose que $b^2 + c^2 > 0$. On note $x = \frac{1}{\beta} X, y = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} Y$ et $z = \frac{1}{\beta \sqrt{b^2 + c^2}} Z$.

On note $P = (x|y|z)$ Ici erreur d'énoncé (matrice composée de trois colonnes).

Calculer $B \times P$.

On a $B \times P = B.(x|y|z) = (B.x|B.y|B.z) = (\vec{O}|\beta Z|\beta Y|)$

- (d) Et montrer que $P \in O_3(\mathbb{R})$; en déduire une expression simple de P^{-1} .

On trouve $P^T.P = I$ et P est carré donc $P \in O_3(\mathbb{R})$ et P est inversible et $P^{-1} = P^T$

3. Déduire des questions précédentes l'existence de P de $O_3(\mathbb{R})$ et un réel $\beta = \dots$ tels que $B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

On a "classiquement" $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} = (\vec{O}|\beta Z|\beta Y|)$

Conclusion : $B \times P = (\vec{O}|\beta Z|\beta Y|) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$ comme P est inversible, on a

4. Montrer que $E(B)$ existe, on donnera son expression en fonction de P et de β .

Avec du calcul et calcul par bloc et de la continuité (il faudrait détailler mais), on a

$$\begin{aligned} \left(I + \frac{B}{n}\right)^n &= \left(I + P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} P^{-1}\right)^n \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}^n P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (I + B\beta)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Conclusion : $E(B)$ existe et $E(B) = P \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \end{pmatrix} P^{-1}$

Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, Q(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$

Pour fabriquer un truc, il y a trois stratégies :

- > On utilise un théorème qui fait le job.
- > Soit on dispose d'une boîte à outil suffisamment riche et avec une analyse/synthèse on fabrique *truc*
- > Soit on constate que *truc* est solution d'une équation et on justifie que l'équation admet une (ou plusieurs solution)

Réponse avec l'équation

Étape 1 : trouver le morphisme et l'équation.

$$\begin{aligned} \text{On veut que : } \phi(Q) = \vec{b} &\iff \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, Q(\lambda_i) = e^{\lambda_i} \\ &\iff (Q(\lambda_1); Q(\lambda_2); \dots; Q(\lambda_p)) = (e^{\lambda_1}; e^{\lambda_2}; \dots; e^{\lambda_p}) \end{aligned}$$

On considère la fonction $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^p ; P \longmapsto \phi(P) = (e^{\lambda_1}; e^{\lambda_2}; \dots; e^{\lambda_p})$
De plus on choisit $\mathcal{D} = \mathbb{R}_{p-1}[X]$ ainsi $\dim(\mathcal{D}) = \dim(\mathcal{A})$

Étape 2 : On justifie que l'équation admet une (ou plusieurs solution)

On justifie que ϕ est linéaire, que $\ker \phi = \{\vec{0}\}$ car trop de racine par rapport au degré et enfin que $\text{Im} \phi = \mathbb{R}^p$ avec le thm du rang

Conclusion : la fonction ϕ est bijective, l'équation $\phi(P) = (e^{\lambda_1}; e^{\lambda_2}; \dots; e^{\lambda_p})$ admet une solution

Réponse avec la boîte à outil

Étape 1 : Les outils

On considère les polynômes interpolateurs de Lagrange, CàD $L_1 = \cancel{(X - \lambda_1)}(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_p)$

On va plutôt utiliser la version normalisée, CàD $L_1^* = \cancel{(X - \lambda_1)} \frac{(X - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \dots \frac{(X - \lambda_p)}{(\lambda_1 - \lambda_p)}$

Le polynôme L_1^* vérifie $\lambda_1 \xrightarrow{L_1^*} 1$

$$\lambda_2 \xrightarrow{L_1^*} 0$$

$\vdots$

$$\lambda_p \xrightarrow{L_1^*} 0$$

On fabrique de même $L_2^*, \dots, L_p^*$

Étape 2 : On fabrique le polynôme Q

On considère le polynôme $Q(X) = e^{\lambda_1} L_1^*(X) + e^{\lambda_2} L_2^*(X) + \dots + e^{\lambda_p} L_p^*(X)$

Le polynôme Q répond à la question