Exercice 1. [Correction] **D'après Exo N°1**

Déterminer le DL de $\sinh$ et $\tan$

Application Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \text{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2. [Correction] **D'après Exo N°51**

On rappelle la formule de Stirling : $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

En pratique, on utilise $n! \underset{n\to\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,[1+o(1)]$

Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer un équivalent $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$

Exercice 3. [Correction] **D'après Exo N°6**

Déterminer 2 termes dans le développement de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Application : Déterminer un équivalent de $\dfrac{\left[\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right]^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\Big(\ln(n^2+n)\Big)^2}$

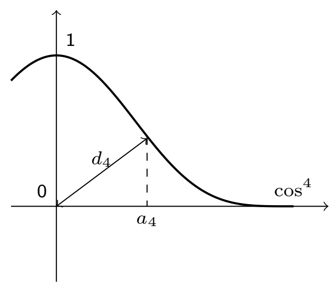
Exercice 4. [Correction] **D'après Exo N°45**

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire le développement de $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

Bonus

Question 1 piste bleu.
Question 2,3,4 : piste rouge
Question 5,6 : piste rouge-noir. On a déjà rencontré ce genre de question dans le DM8 Exo 1 Q1e.

Exercice 5. [Correction] L'objectif de ce problème est de calculer un développement asymptotique du réel d_n^2, défini géométriquement comme étant le carré de la distance minimale de l'origine du repère à la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \cos^n(x)$



On sait (avec Pythagore) que la le carré de la distance d'un point de la courbe à l'origine est égale à $x^2 + \cos^{2n}(x)$

1. Calcul préliminaire
   (a) Donner le développement limité en 0 de $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$
   (b) Écrire le développement limité en 0 de $\ln(\cos(x))$

   On admet que : pour tout $n \in \mathbb{N}$

   la fonction $g_n : x \longmapsto x^2 + \cos^{2n} x$ possède un minimum global sur $\mathbb{R}$, positif, atteint en un point $a_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

   `La démonstration se fait avec le théorème (pas encore vue) "bornée et atteint ses bornes" plus un petit raisonnement. Voir les` $5/2$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $d_n^2 = g_n(a_n)$.

2. Convergence de la suite (d_n)
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un réel $\eta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
   tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ d_n^2 \leqslant \varepsilon + \cos^{2n}(\eta)$
   (b) En déduire que la suite (d_n) converge vers 0.
3. Montrer que la suite (a_n) est non nulle à partir d'un certain rang et qu'elle converge vers 0.
4. Montrer qu'à partir d'un certain rang,
$$\ln(n) = -\ln\left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right) - (2n-1)\ln\Big(\cos(a_n)\Big)$$
5. En déduire (en utilisant Q1) que : $a_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$ puis que
$$a_n^2 \underset{n\to\infty}{=} \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{6\,n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$$
6. En déduire que : $d_n^2 \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ln^2 n}{6\,n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\right)$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) Déterminer le DL de $\sinh$ et $\tan$

On a : $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right]}{-}\frac{\left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right]}{2}$$

$$\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

et $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

Application Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \text{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a : $u_n = \text{sinh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\underset{n\to\infty}{=} \left[\frac{1}{n} + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^5}{5!} + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^5\right)\right] - \left[\frac{1}{n} + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3} + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right] + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)$$

$$= \frac{-1}{6\,n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Conclusion : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{-1}{6\,n^3}$ et $\dfrac{-1}{6\,n^3} < 0$

Donc le nombre u_n est < 0 à partir d'un certain rang.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) On a

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)} \underset{n\to\infty}{=} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi(2n)}\,[1+o(1)]}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,[1+o(1)]\right)^2 2^{4n}2n\,[1+o(1)]}$$

$$= \frac{2^{2n}\sqrt{4\pi n}}{2\pi.n.2^{4n}.2n}[1+o(1)]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}.n^{3/2}.2^{2n}}[1+o(1)]$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Déterminer 2 termes dans le développement de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

On a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{=} \exp\left[n\ln\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2\,n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\right]$

$$= \exp\left[1 - \frac{1}{2\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \exp(1)\,\exp\left[\frac{-1}{2\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= e\,e^{\gamma} =' \ (1+\gamma+o(\gamma))$$

avec $\gamma = \dfrac{-1}{2\,n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *et* $o(\gamma) = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$$= e\left(1 + \frac{-1}{2\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{=} e - \frac{e}{2\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Application : Déterminer un équivalent de $\dfrac{\left[\mathrm{e} - \left[1+\frac{1}{n}\right]^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$

On va déterminer un équivalent pour chacun des item

$$> \mathrm{e} - \left[1+\frac{1}{n}\right]^n = e - \left(e - \frac{e}{2\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{e}{2\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{e}{2\,n}[1+0(1)]$$

$$> e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{=} 1 + \square + o(\square)$$
$$\underset{n\to\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= 1\,[1+o(1)]$$

$$> \ln(n^2+n) = \ln\left(n^2(1+{}^1/_n\,)\right)$$
$$= 2\ln(n) + \underbrace{\ln\left(1+{}^1/_n\,\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln(1)=0}$$
$$= 2\ln(n) + o(1)$$
$$\underset{n\to\infty}{=} 2\ln(n)\,[1+o(1)]$$

conclusion : $$\frac{\left[\mathrm{e} - \left[1+\frac{1}{n}\right]^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2} \underset{n\to\infty}{=} \frac{\frac{e}{2\,n}[1+0(1)]1[1+0(1)]}{(2\ln(n)\,[1+o(1)])^2} \underset{n\to\infty}{=} \frac{e}{4\,n\,\ln(n)}[1+o(1)]$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) 1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

On a $$\pi\sqrt{n^2+n+1} = \pi\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$
$$= \pi\,n\sqrt{1+\square}$$
$$\underset{n\to\infty}{=} \pi\,n\left(1+\frac{1}{2}\square - \frac{1}{8}\square^2 + \mathscr{O}(\square^3)\right)$$
$$\square = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$
$$\square^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}$$
$$\mathscr{O}(\square^3) = \mathscr{O}(\textit{le plus gros de } \square^3) = \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$= \pi\,n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right) + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$= \pi\,n\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{3}{8}\frac{1}{n^2} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
Conclusion : $$\pi\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to\infty}{=} \pi\,n + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

2. En déduire le développement de $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

On a $$\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) \underset{n\to\infty}{=} \cos\left[\pi\,n + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$
$$= (-1)^n\cos\left[\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$
$$= (-1)^n \ominus \sin\left[\frac{3\pi}{8n} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$
$$= (-1)^{n+1}\left[\square + \mathscr{O}\left(\square^2\right)\right]$$
$$= (-1)^{n+1}\left[\frac{3\pi}{8n} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
Conclusion : $$\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) \underset{n\to\infty}{=} (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) 1. Calcul préliminaire

(a) Donner le développement limité en 0 de $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$

On trouve $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{180} + o(x^4)$

(b) Écrire le développement limité en 0 de $\ln(\cos(x))$

On trouve $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^4)$

2. Montrer que : la fonction $g_n : x \longmapsto x^2 + \cos^{2n} x$ possède un minimum global sur $\mathbb{R}$, positif, atteint en un point $a_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

La fonction g_n est paire.

Donc Si un minimum global existe, on peut le chercher sur $\mathbb{R}_+$

Pour tout/chaque $x \geqslant \pi/2$, on a $g_n(x) = x^2 + \cos^2 x \geqslant x^2 \geqslant \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 = g_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

Donc Si un minimum global existe, on peut le chercher sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

La fonction g_n est continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes

Conclusion : le minimum global existe et il est atteint en un point $a_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

`Pour tout` $n \in \mathbb{N}$, `on a :` $d_n^2 = g_n(a_n)$.

3. Convergence de la suite (d_n)

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un réel $\eta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ d_n^2 \leqslant \varepsilon + \cos^{2n}(\eta)$

Je choisis $\mu \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $\mu \leqslant \sqrt{\varepsilon}$.

Par exemple : $\mu = \min\left(\sqrt{\varepsilon}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Comme a_n atteint le minimum de la fonction g_n,

on a $d_n^2 = g(a_n) \leqslant g(\mu) = \mu^2 + \cos^{2n}(\eta) \leqslant \varepsilon + \cos^{2n}(\eta)$

(b) En déduire que la suite (d_n) converge vers 0.

C'est le final de Césaro.

On a $M_n = \varepsilon + \cos^{2n}(\eta) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell = \varepsilon$ car $\mu \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $0 \leqslant \cos(\eta) < 1$

J'applique la définition de $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell = \varepsilon$ avec ε

Ainsi $\exists N_0$ tq $\forall n \geqslant N_0,\ d_n^2 \leqslant M_n \leqslant \ell + \varepsilon = 2\varepsilon$

De plus $\forall n,\ 0 \leqslant d_n^2$

Conclusion : $\forall n \geqslant N_0,\ 0 \leqslant d_n^2 \leqslant M_n \leqslant 2\varepsilon$, la suite (d_n) converge vers 0.

4. Montrer que la suite (a_n) est non nulle à partir d'un certain rang

On a $g(0) = 0^+ \cos^n(0) = 1$

Comme $d_n^2 = g(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, J'applique la définition de $d_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{}$ avec $\varepsilon = 1/2 > 0$,

Ainsi $\exists N_0$ tq $\forall n \geqslant N_0,\ d_n^2 \leqslant \ell + \varepsilon = 1/2$

Conclusion : $\forall n \geqslant N_0$, on a $g(a_n) \leqslant 1/2 < 1 = g(0)$ Donc $a_n \neq 0$.

Montrer que la suite (a_n) est non nulle à partir d'un certain rang et qu'elle converge vers 0.

Pour tout n, on a : $0 \leqslant a_n = \sqrt{a_n^2} \leqslant \sqrt{a_n^2 + \cos^{2n}(a_2)} = d_n$

On conclut avec le théorème des gendarmes.

5. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $\ln(n) = -\ln\left(\dfrac{\sin(a_n)}{a_n}\right) - (2n-1)\ln\Big(\cos(a_n)\Big)$

Comme a_n atteint le minimum global, a_n n'est pas une borne et g_n dérivable

On sait que $g'(a_n) = 0$

Conclusion : $g'(a_n) = 0 \iff 2\,a_n - \sin(a_n)(2n)\cos^{2n-1}(a_n) = 0$

$\iff a_n = n\sin(a_n)\cos^{2n-1}(a_n)$

À partir d'un certain rang, tout est >0,

donc on peut appliquer $\ln$ *et on ré-organise ainsi*

$$\ln(n) = -\ln\left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right) - (2n-1)\ln\Big(\cos(a_n)\Big)$$

6. En déduire (en utilisant Q1) que : $a_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$

On a avec Q1 et sachant que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on a

$$\begin{aligned}
\ln(n) &= -\ln\left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right) - (2n-1)\ln\Big(\cos(a_n)\Big) \\
&\underset{n\to\infty}{=} -\left[-\frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2)\right] - (2n-1)\left[-\frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)\right] \\
&\underset{n\to\infty}{=} n\,a_n^2 + \underbrace{a_n^2\left({}^1/6 - {}^1/2\right) + o(a_n^2) + o(na_n^2)}_{=o(na_n^2)} \\
&\underset{n\to\infty}{=} n\,a_n^2 + o(na_n^2) \\
&\underset{n\to\infty}{=} n\,a_n^2[1+o(1)]
\end{aligned}$$

conclusion : $a_n^2 \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\ln n}{n[1+0(1)]} = \dfrac{\ln n}{n}[1+0(1)] \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$

Puis que : $a_n^2 \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln^2 n}{6\,n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\right)$

On reprend le calcul ci-dessus avec un DL un peut plus long ! ! !

$$\begin{aligned}
\ln(n) &= -\ln\left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right) - (2n-1)\ln\Big(\cos(a_n)\Big) \\
&\underset{n\to\infty}{=} -\left[-\frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2)\right] - (2n-1)\left[-\frac{a_n^2}{2} - \frac{a_n^4}{12} + o(a_n^4)\right] \\
&\underset{n\to\infty}{=} n\,a_n^2 + \frac{n\,a_n^4}{6} + \underbrace{a_n^2\left({}^1/6 - {}^1/2\right) + o(a_n^2) + o(na_n^4)}_{=o(na_n^4)} \\
&\underset{n\to\infty}{=} n\,a_n^2 + \frac{n\,a_n^4}{6} + o(na_n^4)
\end{aligned}$$

Ainsi on a $a_n^2 \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{a_n^4}{6} + o(a_n^4)$

Enfin $a_n^2 \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\ln n}{n}[1+0(1)] \implies a_n^4 \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\ln^2 n}{n^2}[1+0(1)]$

Conclusion : $a_n^2 \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln^2 n}{6\,n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\right)$

7. En déduire que : $d_n^2 \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ln^2 n}{6\,n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\right)$

On a $d_n^2 = g(a_n) = a_n^2 + \cos^{2n}(a_n)$

$$\begin{aligned}
&= a_n^2 + \exp\left(2n\ln\cos(a_n)\right) \\
&= a_n^2 + \exp\left(2n\left[-\frac{a_n^2}{2} - \frac{a_n^4}{12} + o(a_n^4)\right]\right)
\end{aligned}$$

À finir, j'en ai marre