—— Autour de la série Harmonique ——

Exercice classique. À faire.

Exercice 1. [Correction] **La série Harmonique et la constante d'Euler**

1. La série Harmonique
   (a) Montrer que la série $\sum \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)\right)$ converge
   (b) Simplifier la somme partielle. En déduire qu'il existe une constante γ tel que
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$
2. La série Harmonique alternée.
   (a) En déduire un équivalent simple de $A_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ pair}}^{n} \frac{1}{k}$ puis de $B_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ impair}}^{n} \frac{1}{k}$
   (b) On considère la série Harmonique alternée $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

      Exprimer S_n en fonction de A_n et B_n.
      En déduire que la série Harmonique alternée converge et calculer sa limite

— Révision sur les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ —

Connaitre les méthodes usuelles autour des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ est indispensable.
Donc il faut faire la question Q2 de l'exercice

La question Q3 (méthode de la loupe) est plus difficile.

Exercice 2. [Correction] Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. Étudier les fonctions $f : x \longmapsto \arctan(x)$ et $h : x \longmapsto f(x) - x$
2. Convergence.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Déterminer les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Déterminer le signe de $u_1 - u_0$ en fonction de la valeur de x_0.
   (d) Discuter en fonction de u_0, la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha$
   (a) Montrer qu'il existe un unique α tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \neq 0$.

      Indication : $v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha = (\arctan u_n)^\alpha - (u_n)^\alpha$ et on fera une DL avec $\square = u_n$.
   (b) En utilisant le théorème de Cesàro, montrer que : $\frac{v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.
   (c) En déduire l'équivalent de u_n. Donner la nature de la série $\sum u_n$.
4. Bonus. Retrouver et recopier ou faire la démonstration du théorème de Cesàro

Complément autour des suites $u_{n+1} = f(u_n)$

L'exercice suivante est difficile
Question 1. Suivre la méthode détaillée dans l'exercice précédent Q2 piste bleu
Question 2. Difficile mais on l'a déjà rencontrée piste rouge
Question 3. les séries c'est top piste rouge-noir

Exercice 3. Étude d'un point attractif.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$.

1. Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite notée ℓ.
   Vérifier (admettre) que : $0 < f'(\ell) < 1$

   On considère désormais $d_n = u_n - \ell$.
2. On remarque/admet que $0 < f'(\ell) < 1$ et on choisit k choisit tel que $f'(\ell) < k < 1$,

   Montrer que : $|d_n| \underset{n\to\infty}{=} \mathscr{O}(k^n)$, CàD montrer qu'il existe une constante A tel que à partir d'un certain rang, on a $|d_n| \leqslant A.k^n$

   Indication : Déterminer la limite de $\left|\dfrac{d_{n+1}}{d_n}\right|$
3. On suppose que : $u_0 > \ell$ ainsi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > \ell$ et $d_n = u_n - \ell > 0$
   (a) Justifier que $f(u_n) = f(\ell) + f'(\ell)\, d_n + f''(\ell)\, \dfrac{d_n^2}{2} + o(d_n^2)$
   (b) En déduire que la série télescopique associée à la suite $\Big(\ln\big(d_n f'(\ell)^{-n}\big)\Big)$ converge.
   (c) En déduire qu'il existe une constante α tel que $d_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\, f'(\ell)^n$

Révision difficile sur les polynômes

Sujet "classique" rencontré dans toutes les "grosses prépas".
Il y a quelques questions délicates

Le sujet est tombé à centrale MP 2014 mais il était plus détaillé.

Piste Bleue. Question : A1, A3 , B1 et B2
Piste rouge. Question : A2. C'est les polynôme de Chebychev donc pour des MP* du cours

Dans le sujet de Centrale il y a avait une première partie facile autour des polynômes de Chebychev

Piste rouge/noir le reste.

L'énoncé se trouve sur la version électronique sur cahier pépère voir page 3

— Révision difficile sur les polynômes —

Sujet "classique" rencontré dans toutes les "grosses prépas".
Il y a quelques questions délicates

Le sujet est tombé à centrale MP 2014 mais il était plus détaillé.

Piste Bleue. Question : A1, A3 , B1 et B2
Piste rouge. Question : A2. C'est les polynôme de Chebychev donc pour des MP* du cours

Dans le sujet de Centrale il y a avait une première partie facile autour des polynômes de Chebychev
Piste rouge/noir le reste.

Exercice 4. [Correction] **Le théorème de Théorème de Block-Thielmann**

L'objectif de cet exercice est de caractériser les familles de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui satisfont les conditions $\mathscr{C}$ ci-dessous :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* & \deg(P_n) = n \\ \forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 & P_n \circ P_m = P_m \circ P_n \end{cases}$$

où $\circ$ désigne la composition (des polynômes).

Partie A - Préliminaires

1. Montrer que la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait les conditions $\mathscr{C}$.
2. (a) Montrer qu'il existe une unique famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* & \deg(T_n) = n \\ \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} & T_n(\cos(x)) = \cos(nx) \end{cases}$$

   Pour l'unicité, on a besoin du théorème de rigidité

   (b) Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait les conditions $\mathscr{C}$.
3. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des polynômes de degré égale à 1.
   Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ est stable par composition.
   Montrer que Si $A \in \mathscr{E}$ alors la fonction A est bijective et A^{-1} sa bijection réciproque appartient à $\mathscr{E}$

Partie B - Caractérisation

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de polynômes vérifiant les conditions $\mathscr{C}$.

1. Établir l'existence du polynôme A de degré 1 et d'un réel a tels que
$$A \circ P_2 \circ A^{-1} = X^2 + a.$$
2. Montrer que la famille $\left(Q_n = A \circ P_n \circ A^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait les conditions $\mathscr{C}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, Q_n$ est unitaire.
   Rq : On a donc $Q_2 = A \circ P_2 \circ A^{-1} = X^2 + a$
3. En calculant $Q_2 \circ Q_3$, montrer que $a \in \{0, -2\}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer, par l'absurde, qu'il n'y a qu'un seul polynôme unitaire de degré n qui commute avec Q_2.
5. (a) Supposons $a = 0$. Calculer Q_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Supposons $a = -2$. Trouver B un polynôme de degré 1 tel que
$$B \circ T_2 \circ B^{-1} = Q_2$$
   En déduire la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. Conclure.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. La série Harmonique
   (a) On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) &= \frac{1}{n} - \left[\ln(n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \ln(n)\\ &= \frac{1}{2\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}\\ {}^1/_{n^2} > 0\\ \textit{La série } \sum {}^1/_{n^2} \textit{ converge (Série de référence)}\end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{La série } \sum \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)\right) \textit{ converge}$$

   (b) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) = H_N - \ln(N+1)$.

Comme la série converge, on sait que la suite des sommes partielles convergent, ainsi il existe ℓ tel que $H_N - \ln(N+1) = \ell + o(1)$

$$\begin{aligned}\textit{Conclusion : } H_N = \ln(N+1) + \ell + o(1) &= \left(\ln(N) + \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)\right) + \ell + o(1)\\ &= \ln(N) + \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) + \ell + o(1)\\ &= \ln(N) + \ell + o(1)\end{aligned}$$

2. La série Harmonique alternée.
   (a) On a

$$\begin{aligned}A_n = \sum_{\substack{k=1\\ k\ pair}}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{p=1}^{n/2} \frac{1}{2p} = \frac{1}{2} H_{n/2} &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{n}{2}\right) + \gamma + o(1)\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln(n) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\gamma}{2} + o(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_n = \sum_{\substack{k=1\\ k\ impair}}^{n} \frac{1}{k} &= \sum_{Tous} - \sum_{pair}\\ &= \ln(n) + \gamma + o(1) - \left(\frac{1}{2}\ln(n) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\gamma}{2} + o(1)\right)\\ &= \frac{\ln n}{2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\gamma}{2} + o(1)\end{aligned}$$

   (b) On considère la série Harmonique alternée $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

On a

$$\begin{aligned}S_n = B_n - A_n &= \left(\frac{\ln n}{2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\gamma}{2} + o(1)\right) - \left(\frac{1}{2}\ln(n) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\gamma}{2} + o(1)\right)\\ &= \ln(2) + o(1)\end{aligned}$$

Conclusion la suite (S_n) converge vers $\ln(2)$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \left]0,1\right] \quad \text{et} \quad \forall\, n,\ u_{n+1} = Arctan\,(u_n)\,.$$

1. On étudie les fonctions et on trouve

x	$-\infty$	0	∞
$f(x)$	$-\dfrac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\dfrac{\pi}{2}$
signe de $f(x)$	$-$		$+$

x	$-\infty$	0	∞
$h(x) = arctan(x) - x$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$
signe de $h(x)$	$+$		$-$

2. Convergence de la suite (u_n).

   (a) Comme $f = arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   puis on fait par récurrence $H_{<n>}:\ u_n \geqslant 0$

   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue
   Donc les limites ℓ possibles vérifient l'équation

   $$\ell = f(\ell) \iff h(\ell) = 0 \iff \ell = 0 \textit{ voir variation de } h$$

   De plus $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = h(u_0)$ et $u_0 > 0$
   Donc d'après les variations de h, on a $u_1 - u_0 < 0$

   (c) Comme f est croissante et $u_1 - u_0 < 0$, on va montrer par récurrence $H_{<n>} : u_n + 1 - u_n \leqslant 0$
   voici l'hérédité

   $$\left.\begin{array}{c} u_{n+1} \leqslant u_n \\ \text{La fonction } \arctan \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \arctan(u_{n+1}) \leqslant \arctan(u_n) \\ \text{CàD } u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \end{array}$$

   (d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0 ainsi elle converge vers $\ell \geqslant 0$
   Comme 0 est la seule limite possible,
   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Équivalent du nombre u_n quand $n \to \infty$
   On considère la suite (v_n) définie par

   $$v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha$$

   (a) On a

   $$\begin{aligned} v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha &= (\arctan u_n)^\alpha - (u_n)^\alpha \\ &= \left(u_n - \frac{(u_n)^3}{3} + o\left[(u_n)^3\right]\right)^\alpha - (u_n)^\alpha \\ &= (u_n)^\alpha \left(1 - \frac{(u_n)^2}{3!} + o\left[(u_n)^2\right]\right)^\alpha - (u_n)^\alpha \\ &= (u_n)^\alpha \left[1 + \alpha\Box + o\left(\Box\right)\right] - (u_n)^\alpha \\ &= (u_n)^\alpha \left[1 + \alpha\left(-\frac{(u_n)^2}{3}\right) + o\left[(u_n)^2\right]\right] - (u_n)^\alpha \\ &= \frac{-\alpha\,(u_n)^{2+\alpha}}{3} + o\left[(u_n)^2\right] \underset{n \Longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\alpha\,(u_n)^{2+\alpha}}{3} \end{aligned}$$

   $>$ Situation 1. On suppose que $\alpha < -2$ alors $2 + \alpha < 0$ donc $v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

   $>$ Situation 2. On suppose que $\alpha = -2$ alors donc $v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{2}{3}$

   $>$ Situation 3. On suppose que $\alpha > -2$ alors $2 + \alpha > 0$ donc $v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   (b) Je choisis $\alpha = -2$, ainsi on a $\ell = \dfrac{2}{3}$.

   i. Comme $v_n \underset{n \Longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$, on a $\dfrac{v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{2}{3}$

ii. D'autre part

$$\frac{v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}}{n} = \frac{((u_1)^\alpha - (u_0)^\alpha) + ((u_2)^\alpha - (u_1)^\alpha) + ... + ((u_n)^\alpha - (u_{n-1})^\alpha)}{n}$$
$$= \frac{(u_n)^\alpha - (u_0)^\alpha}{n} \qquad \textit{avec } \alpha = -2$$

Conclusion : $\dfrac{(u_n)^{-2} - (u_0)^{-2}}{n} = \dfrac{2}{3} + o(1)$

$$\Longrightarrow \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} = \frac{2}{3}n + o(n)$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{u_n^2} = \frac{2}{3}n + o(n) \qquad car\ -\frac{1}{u_0^2} = o(n)$$
$$\Longrightarrow u_n^2 = \frac{1}{\frac{2}{3}n + o(n)} = \frac{1}{\frac{2n}{3}[1 + o(1)]} = \frac{3}{2n}[1 + o(1)]$$

$$Ainsi\ u_n = \sqrt{\frac{3}{2n}[1 + o(1)]} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{2n}}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)
L'objectif de cet exercice est de caractériser les familles de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui satisfont les conditions $\mathscr{C}$ ci-dessous :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* & \deg(P_n) = n \\ \forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 & P_n \circ P_m = P_m \circ P_n \end{cases}$$

où $\circ$ désigne la composition (des polynômes).

Partie A - Préliminaires

1. Montrer que la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait les conditions $\mathscr{C}$.

   Facile car $X^n \circ X^m = X^{n.m} = X^m \circ X^n$

2. Les polynôme de Chebychev

   C'est du cours ou presque donc RAS

3. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des polynômes de degré égale à 1.

   Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ est stable par composition.

   On suppose que $P, Q \in \mathscr{E}$ ainsi il existe $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$ tq $P = aX + b$ et $Q = a'X + b'$ avec $a \neq 0$ et $a' \neq 0$

   On a $P \circ Q = a(a'X + b') + b$
   $= \underbrace{a.a'}_{\neq 0} X + a.b' + b$

   Conclusion : $P \circ Q$ est bien un polynôme de degré 1, donc $\mathscr{E}$ est stable par composition.

   Montrer que Si $A \in \mathscr{E}$ alors la fonction A est bijective et A^{-1} sa bijection réciproque appartient à $\mathscr{E}$

   Solution classique

   On justifie A bijective avec thm de la bijection monotone
   Puis on calcule A^{-1} avec $A(x) = b \iff \cdots \iff x = \underbrace{\text{Expression de } b}_{=A^{-1}(b)}$

   Solution Astucieuse Avec le calcul ci-dessus, on peut deviner A^{-1}

   La fonction $A \in \mathscr{E}$, ainsi il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

   Je choisis $B = \frac{1}{a}X + \frac{-b}{a}$

   On a $A \circ B = X$ et $B \circ A = X$

   Conclusion : A est bijective et $A^{-1} = B = \frac{1}{a}X + {}^{-b}/_{a}$

Partie B - Caractérisation

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de polynômes vérifiant les conditions $\mathscr{C}$.

1. Établir l'existence du polynôme A de degré 1 et d'un réel a tels que $A \circ P_2 \circ A^{-1} = X^2 + a$.

   Comme la famille (P_n) vérifie les conditions $\mathscr{C}$, on peut écrire $P_2 = aX^2 + bX + C$ avec $a \neq 0$
   Soit $A \in \mathscr{E}$, on peut écrire $A = \alpha X + \beta$ avec $\alpha \neq 0$

   $$\begin{aligned} \text{On a } A \circ P_2 \circ A^{-1} &= \left[\alpha\left(aX^2 + bX + c\right) + \beta\right] \circ A^{-1} \\ &= \left[\alpha.aX^2 + \alpha.bX + \alpha.c + b\right] \circ \left[\frac{1}{\alpha}X + \frac{-\beta}{\alpha}\right] \\ &= \alpha.a\left(\frac{1}{\alpha}X + \frac{-\beta}{\alpha}\right)^2 + \alpha.b(\frac{1}{\alpha}X + \frac{-\beta}{\alpha}) + \alpha.c + b \\ &= X^2\left[\frac{a}{\alpha}\right] + X\left[-2a.\beta + b\right] + X^0[Bof] \end{aligned}$$

   Conclusion : Je choisis $\alpha = a \neq 0$ et $\beta = -\frac{b}{2a}$.
   Le polynôme $A = \alpha X + \beta \in \mathscr{E}$ et convient

2. Montrer que la famille $\left(Q_n = A \circ P_n \circ A^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait les conditions $\mathscr{C}$

   Facile

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, Q_n$ est unitaire.

Comme $\deg(Q_n) = n$, on peut écrire $Q_n = a_n X^n + \cdots$ avec $a_n \neq 0$

On a maintenant $Q_2 \circ Q_n = (X^2 + a) \circ (a_n X^n + \cdots) = a_n^2 X^{2n} + \cdots$

$$et$$

$$Q_n \circ Q_2 = (a_n X^n + \cdots) \circ (X^2 + a) = a_n X^{2n} + \cdots$$

Comme $Q_2 \circ Q_n = Q_n \circ Q_2$, on a $a_n^2 = a_n$ donc $a_n = 0$ ou $a_n = 1$

Conclusion : Comme $a_n \neq 0$, on a forcément $a_n = 1$, CàD le polynôme Q_n est unitaire

3. En calculant $Q_2 \circ Q_3$, montrer que $a \in \{0, -2\}$.

Comme $\deg(Q_3) = 3$ et est unitaire, on peut écrire $Q_3 = X^3 + u\,X^2 + v\,X + w$

Ainsi on a
$$\begin{aligned} Q_2 \circ Q_3 &= \left(X^2 + a\right) \circ \left(X^3 + u\,X^2 + v\,X + w\right) \\ &= \left(X^3 + u\,X^2 + v\,X + w\right)^2 + a \\ &= X^6 + X^5(2u) + X^4(u^2 + 2v) + X^3(2w + 2uv) + X^2(2uw + v^2) + X^1(2vw) + X^0(w^2 + a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3 \circ Q_2 &= \left(X^3 + u\,X^2 + v\,X + w\right) \circ \left(X^2 + a\right) \\ &= \left(X^2 + a\right)^3 + u\left(X^2 + a\right)^2 + v\left(X^2 + a\right) + w \end{aligned}$$

Comme $Q_3 \circ Q_2 = \left(X^2 + a\right)^3 + u\left(X^2 + a\right)^2 + v\left(X^2 + a\right) + w$ est pair et $Q_2 \circ Q_3 = Q_3 \circ Q_2$,
on a $u = w = 0$

Ainsi on a
$$\begin{aligned} Q_2 \circ Q_3 &= X^6 + X^4(2v) + X^2(v^2) + X^0(a) \\ Q_3 \circ Q_2 &= \left(X^2 + a\right)^3 + v\left(X^2 + a\right) \\ &= X^6 + X^4(3a) + X^2(3a^2 + v) + X^0(a^3 + v.a) \end{aligned}$$

Comme $Q_2 \circ Q_3 = Q_3 \circ Q_2$,

on a $2v = 3a$ et $3a^2 + v = v^2$
$$\begin{aligned} &\iff 3a^2 + \frac{3a}{2} = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \\ &\iff 4a^2 + 2a = 3a^2 \\ &\iff a^2 + 2a = 0 \iff a \in \{0, -2\} \end{aligned}$$

Conclusion : on a $a \in \{0, -2\}$

Rq : Cette question technique a été très peu résolu le jours du concours

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, par l'absurde, qu'il n'y a qu'un seul polynôme unitaire de degré n qui commute avec Q_2.

On fait un RA. On suppose que A_n et B_n sont deux polynômes unitaire de degré n **distincts**
et que $A_n \circ Q_2 = Q_2 \circ A_n$ et $B_n \circ Q_2 = Q_2 \circ B_n$

On cherche oups

On note $R = A_n - B_n$ et on regarder $R \circ Q_2$

$$\begin{aligned} R \circ Q_2 &= (A_n - B_n) \circ Q_2 \\ &= A_n \circ Q_2 - B_n \circ Q_2 \\ &= Q_2 \circ A_n - Q_2 \circ B_n \\ &= \left(A_n^2 - a\right) - \left(B_n^2 - a\right) \\ &= (A_n - B_n).(A_n + B_n) \\ &= R.(A_n + B_n) \end{aligned}$$

Comme A_n et B_n sont deux polynômes unitaire **distincts** de degré n,
on a que R est un polynôme $\neq \mathscr{O}$ de degré r et $0 \leqslant r \leqslant (n-1)$
et $\deg(A_n + B_n) = n$

On a donc $\deg(R \circ Q_2) = 2.r$ car composée de deux polynômes
et $\deg(R \circ Q_2) = \deg\left(R.(A_n + B_n)\right) = n.r$

Or $r \leqslant (n-1)$ donc $2.r < r.n$ donc c'est absurde.

Rq : Cette question difficile a été très peu résolu le jours du concours

5. (a) Supposons $a = 0$. Calculer Q_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

    Les polynômes Q_n et X^n sont de degré n et "commutent" avec $Q_2 = X^2$

    Donc à cause l'unicité Question B4, on a $Q_n = X^n$

   (b) Supposons $a = -2$. Trouver B un polynôme de degré 1 tel que $B \circ T_2 \circ B^{-1} = Q_2$

    C'est la même question que la question $B1$. et c'est la même réponse

   En déduire la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

    Les polynômes Q_n et $B \circ T_n \circ B^{-1}$ sont de degré n et "commutent" avec $Q_2 = X^2 - 2$

    Donc à cause l'unicité Question B4, on a $Q_n = B \circ T_n \circ B^{-1}$

6. Conclure

   il y a deux familles $\left\{ A \circ X^n \circ A^{-1} \quad \textit{avec } A \in \mathscr{E} \right\}$ et $\left\{ A \circ B \circ T_n \circ B^{-1} \circ A^{-1} \quad \textit{avec } A \in \mathscr{E} \right\}$