Les Séries numériques.

1 Rappels kulturels

On connait les sommes suivantes que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{\square(\square+1)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{\square(\square+1)(2\square+1)}{6}}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q \neq 0}}$$

Suites arithmético-géométriques

Soit $a \neq 1$ On considère la suite vérifiant $u_0 \in \mathbb{C}$ et,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\,u_n + b \iff u_{n+1} - a\,u_n = b$$

On sait que le nombre u_n est la somme

> D'une suite particulière constante, CàD $\forall\, n \in \mathbb{N},\ p_n = K$, vérifiant la relation de récurrence CàD $p_{n+1} = a\,p_n + b \iff K = a\,K + b \iff K = {}^{b}/_{1-a}$.

> De la suite (h_n) vérifiant la relation de homogène, CàD $h_{n+1} = a\,h_n$ Donc $h_n = h_0\,a^n$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = K + h_n = \frac{b}{1-a} + a^n\,h_0}$$

Exercice 1. la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
Expliciter un en fonction de n.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Ce sont les suites définies par $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$.
On résout l'équation caractéristique $X^2 = aX + b$ de discriminant associé Δ.

> Lorsque $\Delta > 0$ alors on obtient deux racines réelles distinctes r et r'

Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, r^n + \mu\, r'^n$

> Lorsque $\Delta = 0$ alors on obtient deux racines réelles double r

Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, r^n + \mu\, n r^n = (\lambda + \mu\, n)\, r^n$

> Lorsque $\Delta < 0$ alors on obtient deux racines réelles distinctes $r = a + ib = r\, e^{i\theta}$ et $r' = \overline{r}$

Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, r^n \cos(n\theta) + \mu\, r^n \sin(n\theta) = r^n \left[\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right]$

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$
Déterminer un en fonction de n.

2 Définitions et généralités.

Définition 1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, CàD à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- On appelle somme partielle au rang n le nombre $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
- On appelle série de terme général u_n ou série associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite (S_n) des sommes partielles. On la note $\sum u_n$.
- Lorsque la suite (S_n) converge, on dit que la série des u_n converge et on appelle *somme de la série* la limite de suite (S_n).

$$\text{Notation : } S = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Lorsqu'une série ne converge pas (CàD Diverge ou chaotique), on dit que la série diverge.

- Lorsque la série converge, on appelle *reste* au rang n la différence $\ell - S_n$:

$$R_n = S - S_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\right) - \left(\sum_{n=0}^{n} S_n\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k\geqslant n+1} u_k \quad \text{avec } S = \sum_{n=0}^{+\infty} = \lim_{n\to\infty} S_n$$

À noter : R_n, le reste d'ordre n, c'est la "distance" entre S et S_n donc $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Exemples classiques.

La série géométrique : $\sum x^n$	La séries harmonique : $\sum \frac{1}{n}$	La série de Euler : $\sum \frac{1}{n^2}$	Les séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$
$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$	$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$	$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha > 0$

Théorème 2.

- Toutes les sommes ne sont pas des séries.
- On ne modifie pas la nature *convergente ou divergente* d'une série en modifiant ses premiers termes.
- La série converge Ssi la suite des sommes partielles converge, donc

  Une série peut : converger, diverger vers $\pm\infty$ ou être chaotique.

- Combinaison linéaire de deux série

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux séries convergentes et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

  Alors la série $(\lambda\, u_n + \mu\, v_n)$ converge et on a

$$\lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) + \mu\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\, u_n + \mu\, v_n)$$

À méditer

> *Le théorème assure que l'on peut "regrouper" des séries convergentes*

> *Pour pouvoir "distribuer le symbole $\sum$",*

il faut justifier ***<u>avant</u>*** *que les séries des $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent*

`Interprétation : L'ensemble des séries numériques convergentes est un espace vectoriel(de dimension infinie).`

3 Références

3.1 Divergence grossière.

Théorème 3. Divergence grossière

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\sum u_n$ sa série.

- Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
- Par contraposée, on a donc

  Lorsque le nombre u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Attention : la réciproque est FAUSSE

"La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, n'assure pas que la série $\sum u_n$ converge"

3.2 Séries de Référence

Théorème 4. Série géométrique-Série Télescopique-Série de Riemann

Série géométrique Soit $z \in \mathbb{C}$.

La série géométrique associée à z, c'est la série $\sum z^n$

> Lorsque $|z| < 1$, la série $\sum z^n$ converge.

> Lorsque $|z| \geqslant 1$, la série $\sum z^n$ diverge.

Et de plus, on a : $\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Série de Riemann Soit $\alpha > 0$.

On considère la série de Riemann (de paramètre α), c'est la série $\sum {}^1/_{n^\alpha}$

> Lorsque $\alpha > 1$, la série $\sum {}^1/_{n^\alpha}$ converge.

> Lorsque $\alpha \leqslant 1$, la série $\sum {}^1/_{n^\alpha}$ diverge.

Kulture : Avec $\alpha = 1$, on retrouve que la série harmonique $\sum {}^1/_{n}$ diverge
Avec $\alpha = 2$, on retrouve que la série d'Euler $\sum {}^1/_{n^2}$ converge

Série télescopique Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

La série télescopique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge Ssi la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Démonstration :

Série géométrique Soit $z \neq 1$.

on sait que $S_n = \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

Ainsi la suite des sommes partielles (S_n) converge Ssi la suite (z^{n+1}) converge
Ssi $|z| < 1$

Série de Riemann

On utilise une comparaison Série /intégrale voir la section ci-dessous.

Série Télescopique Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

on sait que $S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$

Ainsi la suite des sommes partielles (S_n) converge Ssi la suite (u_{n+1}) converge Ssi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

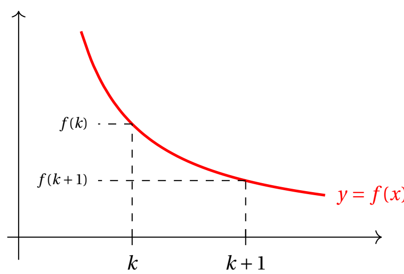
3.3 Comparaison : Somme/intégrale

Théorème 5. Comparaison : Somme/intégrale

On considère la série $\sum f(n)$ associée au somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

On suppose que f une fonction continue et (dé)croissante.

L'idée est de comparer $f(k)$ avec $\int_k^{k+1} f(t)\,dt$ et/ou $\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$



$$\boxed{\text{Conclusion : } \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt}$$

Puis on peut sommer et donc encadrer S_n

4 Séries à termes positifs.

Définition 6. À termes positifs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

On dit que la série $\sum u_n$ est à termes positifs Ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

Lorsque la série $\sum u_n$ est à termes positifs, alors la suite (S_n) des sommes partielles est croissante et

$$\text{Soit } \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \ell < \infty \qquad \text{Soit } \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$$

Pour justifier la convergence d'une série positive,
la question ne sera pas de savoir si le nombre u_n tend vers 0,
mais plutôt à quelle vitesse.

Théorème 7.

- On suppose que : $\forall\, n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2v_n$

  > La série $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow$ la série $\sum u_n$ converge et de plus $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n\right) \leqslant 2\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n\right)$

  > La série $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow$ la série $\sum v_n$ diverge

- On suppose que : $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ ET $v_n > 0$

  > La série $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow$ la série $\sum u_n$ converge.

- On suppose que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ ET $v_n > 0$

  > La série $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow$ la série $\sum u_n$ converge.
  > La série $\sum v_n$ diverge $\Longrightarrow$ la série $\sum u_n$ diverge.

Théorème 8. Comparaisons avec les séries de Riemann

Rappel/Kulture : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} {}^{41}/_{n^\alpha} \Longrightarrow u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{O}\left({}^{1}/_{n^\alpha}\right)$

$u_n \underset{n\to\infty}{=} o\left({}^{1}/_{n^\alpha}\right) \Longrightarrow u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{O}\left({}^{1}/_{n^\alpha}\right)$

Critère pratique de convergence. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{O}\left({}^{1}/_{n^\alpha}\right)$ et $\alpha > 1$

Comme $\frac{1}{n^\alpha}$ est > 0 et se rapproche "rapidement" de 0, la série $\sum u_n$ converge

Critère pratique de divergence. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} {}^{1}/_{n^\alpha}$ et $\alpha \leqslant 1$

Comme $\frac{1}{n^\alpha}$ est > 0 et se rapproche "trop lentement" de 0, la série $\sum u_n$ diverge

Calcul non-concluant. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{=} o\left({}^{1}/_{n^\alpha}\right)$ ou $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{O}\left({}^{1}/_{n^\alpha}\right)$ et $\alpha \leqslant 1$

On est plus "petit" qu'une série lente donc on ne sait pas trop, ...

5 Séries de signe variable.

5.1 Série absolument convergente

Définition 9. Série absolument convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de signe variable ou même complexe

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente

Ssi la série positive $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 10. Le critère de Riemann

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de signe variable ou même complexe

> Une série absolument converge (ACV) est convergente

```
Attention : il existe des séries de signe variable
convergentes
mais non absolument convergentes.
```

> Adaptation du critères théorèmes précédents sur les séries positifs

Il est difficile de conclure qu'une suite de signe quelconque diverge
car il est possible que des négatif compense des positifs
C'est pour cela que le critère pratique n'est pas divergent mais indéterminée

- On suppose que la série $\sum |u_n|$ converge

Car $|u_n| \underset{n\to\infty}{\sim} 4{}^{1}/{}_{n^\alpha}$ **OU** $|u_n| \underset{n\to\infty}{=} o\left({}^{1}/{}_{n^\alpha}\right)$ **OU** $|u_n| \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{O}\left({}^{1}/{}_{n^\alpha}\right)$ et $\alpha > 1$

Alors la série $\sum u_n$ est absolument converge (ACV).

- On suppose que la série $\sum |u_n|$ diverge

```
La conclusion est indéterminée :
la série peut être convergente, divergente ou chaotique
```

Démonstration de $Acv \implies cv$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de signe variable.

On suppose que la série $\sum u_n$ est absolument convergente, CàD la série $\sum |u_n|$ converge

$$\boxed{\text{On va montrer que : } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$$

Je note (u_n^+) La partie positive et (u_n^-) La partie négative de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 11. Partie positive, Partie négative

Soit a un réel.

La partie positive du réel a, noté a^+, est : $a^+ = \max(a, 0)$.

La partie négative du réel a, noté a^-, est : $a^- = \max(-a, 0)$.

On a le formulaire

> $0 \leqslant a^+ \leqslant |a|$ et aussi $0 \leqslant a^- \leqslant |a|$

> $a = a^+ - a^-$ et $|a| = a^+ + a^-$.

La notion de partie positive, partie négative se généralise au suite et au fonction.

Comme $\forall\, n,\ 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et que la série $\sum |u_n|$ converge

Donc d'après le théorème de comparaison, la série $\sum u_n^+$ converge

De même on justifie que la série $\sum u_n^-$ converge.

Comme les série $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ converge, on peut fusionner CàD

$$\left(\sum u_n^+\right) + \left(\sum u_n^-\right) = \sum (u_n^+ + u_n^-) = \sum u_n$$

Conclusion : la série $\sum u_n$ converge (théorème de regroupement).

5.2 Série alternée.

Définition 12. Série alternée

On appelle *série alternée* une série de la forme $\sum (-1)^n a_n$ avec (a_n) une suite positive.

Théorème 13. Critère spéciale des séries alternées

Soit $\sum (-1)^n a_n$ une série alternée

Pour une série alternée, à cause des signe, il y a "compensation"
si le nombre u_n tend "régulièrement" vers 0 alors il y a convergence

On suppose que :

(i) a_n est tjs positif (ii) $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (iii) la suite (a_n) est décroissante

$$\boxed{\text{Alors la série alternée } \sum (-1)^n a_n \text{ converge}}$$

De plus, on a distance entre S_n, la somme partielle, et S, la série, est majorée par a_{n+1} premier terme « négligé » et est de son signe, CàD celui de $(-1)^{n+1}$.

$$|S - S_n| = |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| = \left| \underbrace{(-1)^{n+1} a_{n+1}}_{k=n+1} + \underbrace{\cdots}_{k>n+1} \right| \leqslant a_{n+1}$$

et R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$ CàD celui du premier terme « négligé ».

6 Kulture : Série Harmonique et Série Harmonique altenée

La série Harmonique et la constante d'Euler

1. **La série Harmonique.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

   En utilisant la série télescopique associée, montrer que la suite $H_n - \ln(n)$ converge

   En déduire qu'il existe une constante γ tel que

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

2. **La série Harmonique alternée.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \text{ et aussi } A_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } B_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} \frac{1}{k}$$

   (a) Donner les liens entre H_n, A_n et B_n
   Déterminer un équivalent de A_n et de B_n

   (b) Donner les liens entre S_n, A_n et B_n
   Déterminer un équivalent de S_n.

7 Exercices

Convergence avec le critère pratique

Dire si les séries suivantes sont convergentes (pour les séries positives) ou absolument convergente (pour les séries de signe qcq)

On doit donc trouver un équivalent de u_n puis déterminer la limite de $n^\alpha\, u_n$

Exercice 3. [Correction] facile ou moyen

$$\sum \frac{3n^3+n+1}{(n^2-n+1)(2n^2+1)} \qquad \sum \frac{\ln^2(n)-3\sqrt{n}}{n^2+1} \qquad \sum \frac{\ln(n^2+1)}{(n+1)^2}$$

$$\sum \frac{n}{2^n+n} \qquad \sum \frac{1}{(n^2+1)\sin\left(1/\sqrt{n}\right)} \qquad \sum \frac{\cos\left(1/n\right)}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum \frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)} \qquad \sum \frac{\arctan(n)}{n^2+1} \qquad \sum \frac{\sin(n)}{n^2-1}$$

$$\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \qquad \sum \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) \qquad \sum \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)$$

Exercice 4. Rappeler la formule de Stirling puis étudier les séries

$$\sum \frac{n!}{n^n} \qquad \sum \frac{e^n}{n!} \qquad \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Exercice 5. Plus dur

$$\sum \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} \qquad \sum \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln n)^n} \qquad \sum \frac{1}{n}\left(2-\sqrt[n]{3}\right)^n$$

$$\sum \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right) \qquad \sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) \qquad \sum \sin\left(\frac{n^2}{n+1}\cdot\pi\right)$$

Exercice 6. Discuter en fonction de $a,\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$, la nature des séries suivantes

$$\sum \frac{a^n}{1+a^{2n}} \qquad \sum \frac{1}{a^n+n^{2\alpha}+\ln(n)} \qquad \sum \frac{\ln\left(1+n^\beta\right)}{n^\alpha}$$

Autour des séries Alternée

Exercice 7. Les séries suivantes vérifient-elle le critère des séries alternées

$$\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n^2+n+1} \qquad \sum \frac{(-1)^n\ln(n)}{n^2}$$

Exercice 8. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

1. Déterminer α, β tel que

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{u_n} + \underbrace{\frac{\alpha}{n}}_{a_n} + \underbrace{\frac{\beta}{n\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}_{b_n}$$

2. Justifier que les séries $\sum u_n$ et $\sum b_n$ convergent et que la série $\sum a_n$ diverge
3. En déduire que la série $\sum v_n$ diverge.

Calcul d'une somme de série numérique.

Exercice 9. À l'aide des télescopes, calculer la somme partielle S_n et en déduire la somme des séries suivantes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4n-3}{n\left(n^2-4\right)} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 10. On admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

Comment calculerai-t-on $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$?

Exercice 11. Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$

Comparaison avec une intégrale

Exercice 12.

Donner une primitive de $u'\,u^{\alpha}$.

En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln^2(n)}$

Exercice 13.

Déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$

Lien entre Suite et Série.

Exercice 14. La constante d'Euler

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)\right)$ converge
2. Simplifier la somme partielle. En déduire qu'il existe une constante γ tel que

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Exercice 15. Formule de Stirling On considère les suites $u_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(u_n)$

1. Déterminer un équivalent de $v_{n+1} - v_n$
2. En déduire que la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $K > 0$

On a donc démontrer que : $u_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} K \iff \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{=} K\,[1+o(1)]$

$$\iff n! \underset{n\to\infty}{=} K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\,[1+o(1)]$$

$$\iff n! \underset{n\to\infty}{=} K\,n^n \frac{1}{e^n}\sqrt{n}\,[1+o(1)]$$

Bonus

Exercice 16.

Soit un cordon élastique imaginaire AB, extensible à l'infini avec en B une magnifique noisette.

À la première seconde, il est supposé faire 1000 mètres de long.

Au moment où commence la deuxième seconde, le cordon est instantanément étiré au point d'atteindre une nouvelle longueur totale AB égale à $2000\ \mathrm{m}$,

Il conservera cette dimension jusqu'à ce que prenne naissance la nouvelle seconde. A cet instant précis, un nouvel étirement l'amène à $3000\ \mathrm{m}$, et ainsi de suite...

Conclusion : Les extrémités A et B du cordon élastique se trouvent ainsi distantes l'une de l'autre de $1000\ \mathrm{m}$ pendant toute la première seconde, $2000\ \mathrm{m}$ pendant toute la deuxième seconde, n kilomètres pendant toute la $n^{\text{ième}}$ seconde.

Supposons maintenant que Scrat, le vaillant écureuil de l'age de glace, circule sur ce cordon imaginaire.

Il se trouve situé en A au début de la première seconde et se dirige vers B, CàD vers la noisette, à la vitesse constante d'un mètre par seconde.

Pendant toute la première seconde, Scrat se trouvera (avec une erreur approximative ne dépassant pas un mètre) éloigné d'un kilomètre de l'extrémité B vers laquelle il se dirige.

Lors de la deuxième seconde, cette extrémité B étant passée à $2\ \mathrm{km}$ de A et l'écureuil ayant en comparaison très peu avancé, celui-ci se trouvera pratiquement à $2\ \mathrm{km}$ (en réalité à peu près à 1999 mètres) de B.

Lors de la troisième seconde, et pour des raisons semblables, l'extrémité B sera à peu de chose près à $3\ \mathrm{km}$ de l'écureuil, puis à peu près à $3596\ \mathrm{km}$ au bout d'une heure, etc.

`Démontrer que Scrat le vaillant finira pourtant bel et bien par arriver au but tant convoité, et donner une évaluation du temps qui lui sera nécessaire pour atteindre la noisette géante.`

Correction.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Nature de $\sum \frac{n}{2^n+n}$

On a : $\frac{n}{2^n+n} \underset{n\to\infty}{=} \frac{n}{2^n}[1+o(1)] = \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Conclusion : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est positive et converge

Donc la série $\sum \frac{n}{2^n+n}$ converge

Nature de $\sum \frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)}$

On a : $\frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)} = \frac{\frac{e^n+e^{-n}}{2}}{\frac{e^{2n}+e^{-2n}}{2}} \underset{n\to\infty}{=} \frac{e^n[1+o(1)]}{e^{2n}[1+o(1)]} = \frac{1}{e^n}[1+o(1)] \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Conclusion : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est positive et converge

Donc la série $\sum \frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)}$ converge

Nature de $\sum \frac{\arctan(n)}{n^2+1}$

On a : $\frac{\arctan(n)}{n^2+1} = \frac{\mathcal{O}(1)}{n^2[1+o(1)]} = \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Conclusion : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est positive et converge

Donc la série $\sum \frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)}$ converge

Nature de $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

On a : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\sqrt{n} = \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{n}}[1+o(1)]$

Ainsi $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \underset{n\to\infty}{=} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}[1+o(1)]}{n} \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{2\,n^{3/2}}[1+o(1)]$

Conclusion : la série $\sum \frac{1}{2\,n^{3/2}}$ est positive et converge

Donc la série $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ converge