Limites des fonctions.

1 Vocabulaire.

1.1 Adhérence et Densité.

Définition 1. Adhérence et Densité.
Soit $\mathscr{D}$ un ensemble, un domaine (inclus dans $\mathbb{R}$) et $a \in \mathbb{R}$.

> On dit que a est adhérent à $\mathscr{D}$
Ssi il existe une suite d'élément de $\mathscr{D}$ qui converge vers a.

> L'adhérence de $\mathscr{D}$, notée $\overline{\mathscr{D}}$,
c'est l'ensemble des éléments qui sont adhérents à $\mathscr{D}$

$$\text{Ainsi } a \in \overline{\mathscr{D}} \iff \left| \begin{array}{l} \textit{Il existe une suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ tel que} \\ \quad \forall\, n,\ u_n \in \mathscr{D} \quad et \quad u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \end{array} \right.$$

> On dit que $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$ Ssi $\overline{\mathscr{D}} = \mathbb{R}$

Théorème.
> Soit I est un intervalle
Alors $\overline{I} = I \cup \{\textit{les bornes}\}$

> $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2. Caractérisation séquentielle des sup
Soit A est une partie non vide

Alors $\sup(A)$ est adhérente à $\mathscr{E}$

$$\text{CàD il existe une suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tel que : } \left| \begin{array}{l} \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in A \\ et \\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sup(A) \end{array} \right.$$

Démonstration : Je considère une partie $\mathscr{E}$ non vide.
Lorsque $\sup(\mathscr{E}) = \infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\sup(\mathscr{E}) = \infty$ est le majorant "optimal" et que $n < \infty$, on sait que n ne majore pas $\mathscr{E}$
Donc il existe un élément de $\mathscr{E}$ plus grand que n. Je note u_n cet élément.

Ainsi on a $u_n \in \mathscr{E}$ et $u_n > n$

De plus à cause du théorème de comparaison, on a $u_n > n \implies u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Lorsque $\sup(\mathscr{E}) = c < \infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\sup(\mathscr{E}) = c$ est le majorant "optimal" et que $c - \frac{1}{n} < c$, on sait que $c - \frac{1}{n}$ ne majore pas $\mathscr{E}$

Donc il existe un élément de $\mathscr{E}$ plus grand que $c - \frac{1}{n}$. Je note u_n cet élément.

Ainsi on a $u_n \in \mathscr{E}$ et $c - \frac{1}{n} < u_n$

De plus comme le sup est un majorant de $\mathscr{E}$ et que $u_n \in \mathscr{E}$, on a $u_n \leqslant c$

Conclusion : on a $c - \frac{1}{n} < u_n \leqslant c$ et donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$ (théorème des gendarmes).

1.2 Au Voisinage d'un point.

Définition 3. Voisinage d'un point dans $\mathbb{R}$

> Les voisinages de a $_{\text{dans } \mathbb{R}}$ sont : $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$.

On dit que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ est le voisinage de centre a et de rayon ε.

> Les voisinages de $+\infty$ $_{\text{dans } \mathbb{R}}$ sont : $[A, +\infty[$.

> Les voisinages de $-\infty$ $_{\text{dans } \mathbb{R}}$ sont : $]\infty, B]$

> **Généralisation.** Un voisinage d'un point a dans un domaine $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$:
c'est "la trace" dans $\mathscr{D}$ d'un voisinage de a dans $\mathbb{R}$, c'est donc : $Voisinage_{\text{dans } \mathbb{R}} \cap \mathscr{D}$.

Théorème 4. Voisinage et adhérence

Soit $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$

> Lorsque a est adhérent à $\mathscr{D}$,
alors un voisinage de a dans $\mathscr{D}$ n'est jamais vide.

> Lorsque a n'est pas adhérent à $\mathscr{D}$,
Alors pour ε assez petit, on a $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap \mathscr{D} = \varnothing$.
On convient donc que il n'y a pas de voisinage de a dans $\mathscr{D}$.

Définition 5. Propriétés au voisinage

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

> On dit que f est positive au voisinage de a

Ssi | il existe $\varepsilon > 0$ tel que
  $\forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon],\ f(x) \geqslant 0$

> On dit que f est décroissante au voisinage de $+\infty$

Ssi | il existe $A > 0$ tel que
  f est décroissante sur $[A, \infty[$

> On dit que $f \leqslant g$ au voisinage de $-\infty$

Ssi | il existe $B < 0$ tel que
  $\forall x \in]-\infty, B],\quad f(x) \leqslant g(x)$

2 Définition de la Limite d'une fonction .

Définition 6. Définition de la limite

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathscr{D}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Limite. On dit que la fonction f admet ℓ pour limite en a

$\forall \varepsilon > 0$
Il existe $\eta > 0$ tel que :
$\forall x \in [a-\eta, a+\eta]$ alors $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ ou $f \xrightarrow[a]{} \ell$ ou bien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$.

`Signification :` Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de a tel que $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$

Définition 7. Limite à droite, à gauche.

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathscr{D}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Limite à droite. On dit que la fonction f admet ℓ pour limite à droite de a, CàD en a^+, Ssi

$\forall \varepsilon > 0$
Il existe $\eta > 0$ tel que :
$\forall x \in]a, a+\eta]$ alors $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} \ell$ ou $f \xrightarrow[a^+]{} \ell$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$.

Adaptation On dit que la fonction f admet ℓ^+ pour limite à droite de a, CàD en a^+, Ssi

Exemple. On a facilement $1/x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ *et* $1/x \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$. Ainsi $\exp\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ *et* $\exp\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0^+$

Théorème 8. Limite Vs limite à droite/gauche

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathscr{D}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que f est définie à gauche et à droite de a.

> Lorsque $a \in \mathscr{D}$, on a :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \text{ \textbf{\textit{et aussi}} } f(a) = \ell$$

> Lorsque $a \notin \mathscr{D}$ mais $a \in \overline{\mathscr{D}}$, on a :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$$

Exemple. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & Si\ x > 0 \\ 1 & Si\ x = 0 \\ 1-x & Si\ x < 0 \end{cases}$$

> En 0^+, on a $f(x) = e^x \xrightarrow[x\to 0^+]{} e^0 = 1$

> En 0^-, on a $f(x) = 1 - x \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1 - 0 = 1$

> Et $f(0) = 1$

Conclusion : On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

3 Les théorèmes classiques de la théorie.

3.1 Inégalités/Propriétés au voisinage

Théorème 9. J'applique la def ..., ainsi au voisinage ....
Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point adhérent à $\mathscr{D}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
On note $Q(x)$ le candidat quotient

J'applique la def de $Q(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ avec $\varepsilon = ... > 0$

Ainsi au voisinage, on a $\ell - \varepsilon \leqslant Q(x) \leqslant \ell + \varepsilon$

On veillera impérativement à ce que : ε est $\underset{\texttt{Strict}}{>}$ 0 et ne dépend pas de x.

Démonstration. Il n'y a rien à démontrer, on applique la définition!!!!

Exemples : Montrer les inégalités suivantes.

E1. Montrer que : il existe $\eta > 0$ tel que $\forall\, x \in \left]-\eta, \eta\right[$, $|\sin(x)| \leqslant 2|x|$
E2. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$
E3. Montrer que : il existe M et $\eta > 0$ tel que $\forall\, x \in \left]0, \eta\right[$, $\sin(x) \leqslant M x$
E4. Montrer que : $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \leqslant x$
E5. Montrer que : il existe $\eta > 0$ tel que $\forall\, x \in \left[0, \eta\right]$, $\sin(x) \leqslant M x$
E6. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leqslant x$

3.2 À la limite.

Théorème 10. Limite et Propriétés au voisinage
Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point adhérent à $\mathscr{D}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

> **Passage à la limite des inégalités.**

Soit f et g deux fonctions de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point adhérent à $\mathscr{D}$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} f \leqslant g \textit{ au voisinage de } a \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{Alors à la limite : } \ell \underset{Large}{\leqslant} \ell'$$

> **Unicité de la limite.**

Si la fonction f admet la limite ℓ en a Alors ℓ est unique.

Démonstration. On fait des RA. La démonstration est en annexe.

Exemples "classiques" avec les suites.

E1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue.
Démontrer que : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors la limite ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$.

E2. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On sait/admet que $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$
Démontrer avec un RA que la suite (H_n) ne converge pas dans $\mathbb{R}$

E3. On démontre "facilement" que la suite $Q_n = \frac{n^2}{2^n}$ est décroissante (à partir d'un certain rang), positive, ainsi elle converge vers $\ell \geqslant 0$
Montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0$, $Q_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} Q_n$. En déduire avec un RA que $\ell = 0$

3.3 Opérations sur les limites.

Le théorème théorique. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$, alors

> l'expression $2f(x)-3g(x)$ a une limite quand $x\to a$ et $2f(x)-3g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 2\ell-3\ell'$
> l'expression $f(x).g(x)$ a une limite quand $x\to a$ et $f(x).g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.\ell'$
> l'expression ${f(x)}/{g(x)}$ a une limite quand $x\to a$ et ${f(x)}/{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} {\ell}/{\ell'_{\neq 0}}$

Théorème 11. Le théorème pratique

Si/Lorsque l'expression $f(x)$ est fabriquée avec les fonctions usuelles et les opérations classiques
Alors, *avec un DL*, on sait trouver la limite de $f(x)$ quand $x\to a$

Bonus : Si/Lorsque la série $\sum un$ converge ou la suite des sommes partielles (S_n) converge
Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3.4 Gendarmes, Comparaison, Distance.

Théorème 12.

Soit f et m, M trois fonctions de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point adhérent à $\mathscr{D}$

> **Le Théorème des 2 gendarmes.**

$$\left.\begin{array}{r} m(x)\leqslant f(x)\leqslant M(x) \text{ au voisinage de } a \\ m(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \text{ et } M(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ Alors : } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

> **Théorèmes de Comparaison.**

Théorème de minoration.

$$\left.\begin{array}{r} m(x)\leqslant f(x) \text{ au voisinage de } a \\ m(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ Alors : } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$$

Théorème de Majoration.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\leqslant M(x) \text{ au voisinage de } a \\ M(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ Alors : } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$$

> **Théorème de la distance**

$$\left.\begin{array}{r} \left|f(x)-\ell\right|\leqslant M(x) \text{ au voisinage de } a \\ M(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ Alors : } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

Complément 1 :

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ est bornée au Voisinage de } a \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x).\varepsilon(x) = Born\acute{e}e.\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Complément 2 :

$$\left.\begin{array}{r} m(x)\leqslant f(x)\leqslant M(x) \text{ au voisinage de } 0 \\ m(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{2} \text{ et } M(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{2}$$

Démonstration : Démonstration des applications.

> On a $|Born\acute{e}e.\varepsilon(x)| = |Born\acute{e}e|.|\varepsilon(x)| \leqslant K.|\varepsilon(x)|$. On conclut avec le théorème du module.
> On encadre ${f(x)}/{PP}$ puis on conclut. Cependant si on fait le travail proprement, c'est plus délicat que prévu, car il y a des problèmes lorsque la PP n'est pas de signe constant sur V.

3.5 Théorème de la limite monotone.

Soit f et m, M trois fonctions de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point adhérent à $\mathscr{D}$

En général quand $x \to a$, il y a 3 situations possibles

Soit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe.	Soit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.	Soit le nombre $f(x)$ n'a pas de limite quand $x \to a$.

On suppose dorénavant que en plus
la fonction f est croissante au voisinage de a

Théorème 13. Théorème de la limite monotone à gauche et à droite

Soit f une fonction *croissante* au voisinage de a.

> Quand $x \to a^-$, il y a 2 situations

Soit $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ Soit $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$.

De plus si, au voisinage de a, f est croissante et majorée par M

alors forcément $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell \leqslant M$.

> Quand $x \to a^+$, il y a 2 situations

Soit $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ Soit $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

De plus si, au voisinage de a, f est croissante et minorée par m

alors forcément $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell \geqslant m$.

La démonstration est en annexe.

Théorème 14. Théorème de la limite monotone en un point

Soit f une fonction définie et *croissante* sur $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.

On est dans la situation suivante

> Au voisinage de a^-, la fonction est est croissante et est majorée par $f(a)$.

> Au voisinage de a^+, la fonction est est croissante et est minorée par $f(a)$.

Ainsi le théorème précédent assure que :
la fonction f admet des limites finies à gauche et à droite de a et que

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x\to a^+} f(x)$$

4 Limite et suite.

4.1 la fonction N'a PAS de limite.

Théorème 15.

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathscr{D}}$
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathscr{D}$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ \\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \end{array}\right\} \Longrightarrow f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

Démonstration : C'est la même démonstration que la composée des fonctions avec u_n à la place de f et f place de g.

Application.

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un point adhérent à $\mathscr{D}$.
Si on trouve deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$\begin{pmatrix} u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \\ \\ f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_1 \end{pmatrix} \text{et} \begin{pmatrix} v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \\ \\ f(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_2 \end{pmatrix} \text{et } \ell_1 \neq \ell_2$$

Alors la fonction f n'a pas de limite quand $x \to a$.

Démonstration : C'est évident avec un R.A.
En effet Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ alors avec le théorème précédent $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et donc $\ell_1 = \ell$ à cause de l'unicité de la limite.
De même on justifie $\ell_2 = \ell$. C'est contradictoire avec $\ell_1 \neq \ell_2$.

Exemple. La fonction Cosinus n'a pas de limite quand $x \to +\infty$

Explication.

En effet, on considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a

$$\begin{pmatrix} u_n = 2n\pi \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \\ \\ \cos(u_n) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} v_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \\ \\ \cos(v_n) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 1 \neq 0.$$

Conclusion : la fonction Cosinus n'a pas de limite quand $x \to +\infty$

4.2 Caractérisation séquentielle

Théorème 16.
Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathscr{D}}$.

On suppose que la fonction f ne tend pas vers ℓ quand $x \to a$

Alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

> $u_n \in \mathscr{D}$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

> $f(u_n)$ "reste loin de ℓ", CàD

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \textit{distante entre } u_n \textit{ et } \ell = |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon > 0$$

Ce théorème abstrait sera utilisé pour démontrer un gros théorème dans le chapitre continuité.

Démonstration : On commence par écrire la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$

$$\text{CàD}\quad \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0 \textit{ tel que } \forall\, x : \big(x \in [a-\eta, a+\eta] \implies f(x) \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]\big)$$

On en déduit la définition de "la fonction f ne tend pas vers ℓ quand $x \to a$"

$$\text{CàD}\quad \exists\varepsilon > 0 \textit{ tel que } \forall\,\eta > 0,\ \exists\, x \textit{ avec } x \in [a-\eta, a+\eta] \textit{ ET } \underbrace{f(x) \notin [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]}_{\iff |f(x)-\ell|>\varepsilon>0}$$

J'applique la définition de "la fonction f ne tend pas vers ℓ quand $x \to a$ "avec $\eta = \dfrac{1}{n}$,

Ainsi il existe x qui dépend de n et que le note u_n avec

$$u_n \in \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right] \quad \textit{et } |u_n - \ell| > \varepsilon$$

Comme $a - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant a + \dfrac{1}{n}$, le théorème des gendarme assure que $u_u \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ et on a bien $|u_n - \ell| > \varepsilon > 0$.

Théorème 17. Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction
Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un point adhérent à $\mathscr{D}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On a équivalence

(i) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$

(ii) Pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathscr{D}$ et qui converge vers a
alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Ce théorème regroupe en un seul énoncé les 2 théorèmes précédents.
En effet,

$(i) \implies (ii)$, c'est le théorème ....
et $(ii) \implies (i)$ est une conséquence du théorème précédent car par un R.A. une suite "qui reste loin" de ℓ ne converge pas vers ℓ.

5 Exercices

Adhérence

Exercice 1. [Correction] Montrer que : $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. Plus précisément,

Montrer que : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entier qui converge vers ℓ
Alors $\ell \in \mathbb{Z}$ et de plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.

J'applique la définition, ainsi ....

Exercice 2. [Correction] Soit f une fonction $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

On considère la fonction F définie par : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ On admet car ce n'est l'objectif de l'exercice) que F est bien définie sur $\mathbb{R}$

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que : Si $t \geqslant A$ alors $f(t) \geqslant \frac{1}{2}$
2. En déduire $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$

Exercice 3. [Correction] Soit la fonction F définie par : $F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1-t}\,dt$ On admet que f est bien définie et est croissante sur $[0,1[$

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : Si $t \in [\alpha, 1[$ alors $\frac{e^t}{1-t} \geqslant \frac{1}{(1-t)}$
2. En déduire $\lim\limits_{x\to1^-} F(x)$

Exercice 4. [Correction] Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ On admet que f est bien définie et est croissante sur $\mathbb{R}_+$

1. Démontrer qu'il existe $A > 0$ tel que : Si $t \geqslant A$, alors $e^{-t^2} \leqslant 3.e^{-t}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie.

Exercice 5. [Correction] Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sin t}\,dt$

On admet que f est bien définie et est croissante sur $]0,\pi[$

1. Démontrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que : Si $t \in \left]0, \eta\right]$, alors $\frac{t}{12} \leqslant \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \leqslant t$
2. En déduire un encadrement $f(x)$ puis la limite de $f(x)$ quand $x \to 0^+$

Exercice 6. *Cesàro pour les fonction.*

Soit f une fonction $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction F définie par : $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$

On suppose que $f(t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

On fixe $\varepsilon > 0$

1. Montrer qu'il existe $C, A > 0$ tel que : Si $t \geqslant A$ alors $\frac{1}{x}[C - (x-A)\varepsilon] \leqslant F(t) \leqslant \frac{1}{x}[C + (x-A)\varepsilon]$
2. En déduire qu'il existe $A' > 0$ tel que : Si $t \geqslant A'$ alors $-2\varepsilon \leqslant F(t) \leqslant +2\varepsilon$.
   Que peut-on conclure ?

Utilisation de la monotonie

Exercice 7. [Correction] Pour tout $a>0$. On considère la fonction f_a définie sur $]0,+\infty[$ par $f_a(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^a}$

1. Montrer que la fonction f_a est décroissante au voisinage de $+\infty$.
   En déduire que la fonction f_a admet une limite $\ell_a \geqslant 0$ quand $x \to +\infty$.
2. Déterminer une relation entre f_a et $f_{a/2}$. En déduire que $\ell_a = 0$.

$$\boxed{\text{Conclusion : Pour tout } a>0,\ \ln(x) \underset{x\to\infty}{=} o\left(x^a\right)}$$

3. On peut adapter la méthode pour justifier que : Pour tout $a>0$, $x^a \underset{x\to\infty}{=} o\left(e^x\right)$

Exercice 8. [Correction] Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et soit $a\in\mathbb{R}_+^*$.
On suppose que la fonction f est croissante et que la fonction $\left[{}^{f(x)}/_{x}\right]$ est décroissante.

1. En utilisant les monotonie, déterminer, au voisinage de a^+, un encadrement de $f(x)$.
   En déduire $\lim\limits_{a^+} f$.
2. Faire le même travail au voisinage de a^-. Que peut-on conclure ?

Utilisation des suites

Exercice 9. Soit $T>0$ et f une fonction T-périodique, CàD $\forall x,\ f(x+T)=f(x)$.
On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \ell$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On va démontrer que la fonction } f \text{ est constante égale à } \ell,\\ \text{CàD } \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\ell.\end{array}}$$

Voici une démarche possible : Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

> *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que : $u_0=x$ et $f(u_{n+1})=f(u_n)$*
> *Comme $f(x+T)=f(x)$, il est naturel de prendre $u_{n+1}=u_n+T$*
>
> *D'une part : la suite $\left(f(u_n)\right)$ est constante donc ....*
>
> *D'autre part : $u_{n+1}=u_n+T$ donc ....*
>
> *Conclusion.*

Exercice 10. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, f(2x)=f(x)$ et $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}\ell$.

   $\boxed{\text{Montrer que, sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ la fonction } f \text{ est constante égale à } \ell.}$

   `Indication : Suivre la démarche de l'exercice précédente.`
2. Reprendre l'exercice et adapter la méthode avec $\forall x\in\mathbb{R}, f(2x)=f(x)$ et $f(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 42$.
3. Reprendre l'exercice et adapter la méthode avec : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f\left(x^2\right)=f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=42$.

Exercice 11. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)\cos x$ et que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a$

1. Montrer, par récurrence, que : $\forall x \in \mathbb{R}$ avec $x \not\equiv 0 \mod [\pi]$, $\forall n \in \mathbb{N}$
$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}.$$
2. Déterminer $f(x)$ puis la fonction f

Utilisation de la densité

Exercice 12. Soit f une fonction définie, continue de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$
On note $\alpha = f(1)$

1. Calculer $f(0)$.
2. On suppose que $x \in \mathbb{N}$, Montrer que $f(x) = \alpha x$
3. On suppose que $x \in \mathbb{Z}$, Montrer que $f(x) = \alpha x$
4. On suppose que $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, Montrer que $f(x) = f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \alpha \dfrac{p}{q} = \alpha x$
5. On admet/rappelle la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

   On a donc : " $\forall \pi \in \mathbb{R}$, Il existe une suite (r_n) avec $r_n \in \mathbb{Q}$ et $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$ "

   On suppose que x_0 est fixé dans $\mathbb{R}$.

   Montrer que $f(x_0) = \alpha x_0$.

6 Annexe.

6.1 Démonstrations de $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Théorème 18.

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{R}$

Démonstration : On connait la célèbre suite

$$3 \quad 3.1 \quad 3.14 \quad 3.141 \quad 3.1415 \quad 3.14159 \quad ....$$

elle converge vers π et il est "facile" de retrouver que $3.1415 = \frac{\lfloor \pi 10^4 \rfloor}{10^4}$, on a donc l'idée de considérer la suite

$$u_n = \frac{\lfloor \pi.10^n \rfloor}{10^n}$$

> On a facilement $u_n = \frac{\lfloor x.10^n \rfloor}{10^n} = \frac{Entier}{Entier} \in \mathbb{Q}$

> De plus, on a : .... $\leqslant \lfloor \square \rfloor \leqslant$ ....

$$\text{On a donc } .... \leqslant u_n = \frac{\lfloor \pi.10^n \rfloor}{10^n} \leqslant ....$$

Ainsi avec le théorème des gendarmes, on a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$.

Il est clair que l'on remplacer π par a quelconque dans $\mathbb{R}$, donc

Conclusion : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Pour démontrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on fait de même avec la suite

$$v_n = \sqrt{2}\,\frac{\lfloor a/\sqrt{2}\,.10^n \rfloor}{10^n} = \sqrt{2}\,\frac{Entier}{Entier}$$

A l'aide d'un RA., on démontre que $u_n \notin \mathbb{Q}$ et avec le même type d'encadrement, que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Conclusion : $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

6.2 Propriétés classiques : Les démonstrations.

Théorème 19. Unicité de la limite

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathscr{D}}$.
Si, en a, la fonction f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$
Alors ℓ est unique.

Démonstration : On fait un R.A. La démonstration est la même que pour les suites donc pour ne pas refaire exactement la même, je suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

Ici on va faire des dessins.

> J'applique la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ avec $\varepsilon = 1 > 0$
Ainsi il existe $\eta_1 > 0$ tel que :
Si $x \in [a - \eta_1, a + \eta_1]$ alors $f(x) \leqslant \ell + 1$

> J'applique la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ avec $A = \ell + 2$
Ainsi il existe $\eta_2 > 0$ tel que :
Si $x \in [a - \eta_2, a + \eta_2]$ alors $f(x) \geqslant A = \ell + 2$

Je considère $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Si $x \in [a - \eta, a + \eta]$ alors les 2 inégalités sont valides et on a

$$f(x) \leqslant \ell + 1 \underset{Strict}{<} \ell + 2 \leqslant f(x) \quad \text{OUPS!!!!!}$$

Théorème 20. Limite $\Longrightarrow$ bornée au voisinage

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathscr{D}}$.
Si, en a, la fonction f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$
Alors la fonction f est bornée au voisinage de a.

Démonstration : J'applique la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ avec $\varepsilon = 1 > 0$
Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que : Si $x \in [a - \eta, a + \eta]$ alors $\ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$
Conclusion f est majorée par $\ell + 1$ et minorée par $\ell - 1$ sur $[a - \eta, a + \eta]$

<u>Autre démonstration avec les Valeurs Absolues.</u>
Comme $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, on a $|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |\ell|$.
J'applique la définition de $|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |\ell|$ avec $\varepsilon = 1 > 0$
Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que : Si $x \in [a - \eta, a + \eta]$ alors $|f(x)| \leqslant |\ell| + 1$
Conclusion f est bornée par $|\ell| + 1$ sur $[a - \eta, a + \eta]$

Théorème 21. Équivalent $\Longrightarrow$ Encadrement au voisinage

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $0 \in \overline{\mathscr{D}}$.
On suppose que $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} 5x^3$
Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0, \alpha]$, $\frac{1}{2}(5x^3) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}(5x^3)$

Démonstration : On sait que $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} 5x^3$ signifie que $Quotient = \frac{f(x)}{5x^3} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.
J'applique la définition de $Quotient \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ avec $\varepsilon = {}^1/_2 > 0$
Ainsi il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\text{Si } x \in [0 - \alpha, 0 + \alpha] = [-\alpha, \alpha] \text{ alors } \frac{1}{2} = \ell - \varepsilon \leqslant \frac{f(x)}{5x^3} \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{3}{2}$$

> <u>Sur $]0, \alpha]$:</u> Comme $5x^3 > 0$ donc on a bien $0 < \frac{1}{2}(5x^3) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}(5x^3)$.

> <u>Sur $[-\alpha, 0[$:</u> Comme $5x^3 < 0$ donc on a $\frac{3}{2}(5x^3) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}(5x^3) < 0$.

Théorème 22. Passage à la limite des inégalités

Soit f et g deux fonctions de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathscr{D}}$.
On a

$$\left.\begin{array}{r} f \leqslant g \textit{ au voisinage de } a \\ \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{Alors à la limite : } \ell \underset{Large}{\leqslant} \ell'$$

6.3 Le Théorème des 2 gendarmes : la démonstration.

Théorème 23. Le Théorème des 2 gendarmes

Soit f et m, M trois fonctions de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point adhérent à $\mathscr{D}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x) \textit{ au voisinage de } a \\ \\ m(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \textit{ et } M(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{Alors : } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

Démonstration : Je démontre rapidement les 2 gendarmes. (C'est la même démonstration que pour les suites.)

> Comme $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ *au voisinage de a*, l'encadrement est valide sur un voisinage V de a.

> Comme $m(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, on applique la def ainsi on obtient $\ell - \varepsilon \leqslant m(x)$ sur un voisinage V' de a.

> Comme $M(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, on applique la def ainsi on obtient $M(x) \leqslant \ell + \varepsilon$ sur un voisinage V'' de a.

Sur $V \cap V' \cap V''$ toutes les inégalités sont valides, ainsi on a

$$\ell - \varepsilon \leqslant m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x) \leqslant \ell + \varepsilon$$

On a vérifié la définition de la limite fini.

6.4 Théorème de la limite monotone : Démonstration.

Théorème 24. Théorème de la limite monotone

Soit f une fonction *croissante* au voisinage de a.

> **Quand** $x \to a^-$, il y a 2 situations

Soit $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe Soit $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$.

De plus si, au voisinage de a, f est croissante et majorée alors forcément $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe.

> **Quand** $x \to a^+$, il y a 2 situations

Soit $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe Soit $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

De plus si, au voisinage de a, f est croissante et minorée alors forcément $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe.

Démonstration : On va faire la démonstration quand $x \to b^-$.

On doit démontrer que
$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup\{f(t) avec\ t \in]a,b[\} = \textit{ le "majorant optimal" de } |f(t)|\ sur\ ]a,b[$$

Situation : $\sup\{f(t) avec\ t \in]a,b[\} = +\infty$

On fixe A

$$\boxed{\text{On veut trouver un voisinage } V \text{ de } b^- \text{ tel que : Si } x \in V \text{ alors } f(t) \geqslant A.}$$

Comme $\sup\{f(t) avec\ t \in]a,b[\} = +\infty$, donc A n'est pas un majorant donc il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $A < f(x_0)$.
Enfin comme f est croissante, ii $x \in [x_0, b[$ alors $A \leqslant f(x_0) \leqslant f(x)$

Conclusion : $[x_0, b[$ est le voisinage que l'on cherche. Fini.

Situation : $\sup\{f(t) avec\ t \in]a,b[\} = \ell < +\infty$

On fixe $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\text{On veut trouver un voisinage } V \text{ de } b^- \text{ tel que : Si } x \in V \text{ alors } \ell - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant \ell + \varepsilon.}$$

Comme $\sup\{f(t) avec\ t \in]a,b[\} = \ell$ est un majorant, on a

$$\forall\, t \in]a,b[, \quad f(t) \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$

Comme $\sup\{f(t) avec\ t \in]a,b[\} = \ell$ est un majorant optimal, donc $\ell \leqslant M$ et $\ell - \varepsilon$ ne majore pas, ainsi il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $\ell - \varepsilon < f(x_0)$.
Enfin comme f est croissante, ii $x \in [x_0, b[$ alors $\ell - \varepsilon \leqslant f(x_0) \leqslant f(x)$

Conclusion : $[x_0, b[$ est le voisinage que l'on cherche. Fini.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

On va démontrer que $\ell \in \mathbb{Z}$ avec un RA.

On suppose que $\ell \notin \mathbb{Z}$

Comme $\ell \notin \mathbb{Z}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que : $n \underset{Strict}{<} \ell \underset{Strict}{<} (n+1)$.

Je note $a = \min\left(\frac{\ell - n}{2}, \frac{(n+1)-\ell}{2}\right)$,

ainsi $a > 0$ et $n < \ell - a < \ell + a < (n+1)$ et $[\ell - a, \ell + a] \cap \mathbb{Z} = \varnothing$

J'applique la définition de $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec $a > 0$,

Ainsi il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_n \in [\ell - a, \ell + a]$

Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}$ donc $u_n \in [\ell - a, \ell + a] \cap \mathbb{Z}$ OUPS ! ! !

On va maintenant démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.

Comme $\ell \in \mathbb{Z}$, on a $\left[\ell - {}^1/_2\, , \ell + {}^1/_2\,\right] \cap \mathbb{Z} = \{\ell\}$

J'applique la définition de $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec $\varepsilon = {}^1/_2 > 0$,

Ainsi il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_n \in \left[\ell - {}^1/_2\, , \ell + {}^1/_2\,\right]$

donc $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_n \ln\left[\ell - {}^1/_2\, , \ell + {}^1/_2\,\right] \cap \mathbb{Z} = \{\ell\}$,

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à ℓ à partir d'un certain rang.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On applique la définition de $f(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$ avec $\varepsilon = 1/2 > 0$.
2. On intègre sur $[A, x]$.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. On applique la définition de $\dfrac{e^t}{1-t}.(1-t) \xrightarrow[t\to\infty]{} e$ avec $\varepsilon = e - 1 > 0$.
2. On intègre sur $[A, x]$.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. On applique la définition de $e^{-t^2+t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ avec $\varepsilon = 3 > 0$.
2. On intègre sur $[A, x]$. On en déduit un majorant f au voisinage de $+\infty$.
   De plus la fonction f est croissante au voisinage de $+\infty$.
   Le théorème de la limite-monotone, permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. On a
$$\frac{1}{sin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin(t)}{t\sin(t)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3/3! + o(x^3)}{x(x + o(x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{6}$$
2. On applique la définition de $\dfrac{\frac{1}{sin(t)} - \frac{1}{t}}{{}^t/_6} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ avec $\varepsilon = \ldots$.
3. On intègre sur $[x, 2x]$. On conclut avec le théorème des 2 gendarmes que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln(2)$.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. La fonction f_a est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D} =]0, +\infty[$, l'étude de la dérivée f_a' assure que la fonction f_a est décroissante au voisinage de $+\infty$.
   De plus, au voisinage de $+\infty$, on a $f_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^a} > 0$.

   Ainsi grâce au théorème de la limite monotone, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = \ell_a \geqslant 0$
2. Comme $\dfrac{\ln(x)}{x^a} = \dfrac{1}{x^{a/2}}\dfrac{\ln(x)}{x^{a/2}}$, on a $\forall\, x > 0,\ f_a(x) = \dfrac{f_{a/2}(x)}{x^{a/2}}$

   On regarde ce que devient cette égalité quand $x \to +\infty$, ainsi $\ell_a = \dfrac{\ell_{a/2}}{\infty} = 0$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

1. Comme la fonction f est croissante, on a $\forall x \geqslant a,\ f(x) \geqslant f(a)$.
   Comme la fonction $\left[{}^{f(x)}/_{x}\right]$ est décroissante, on a $\forall x \geqslant a > 0,\ \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{f(a)}{a}$.
   $$\text{Conclusion : } \forall x \geqslant a > 0,\ f(a) \leqslant f(x) \leqslant x\frac{f(a)}{a}$$
   Le théorème des 2 gendarmes permet de conclure que : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Ainsi la fonction f est continue à droite de a.
2. On fait de même en a^- et on conclut que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$. Ainsi la fonction f est continue à gauche de a.

$$\text{Conclusion : Pour tout } a > 0, \text{ la fonction } f \text{ est continue en } a, \text{ CàD } f \text{ est } \mathscr{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$