

Exercice 1. [Correction] Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. On admet que f est bien définie et est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

1. Démontrer qu'il existe $A > 0$ tel que : Si $t \geq A$, alors $e^{-t^2} \leq 3.e^{-t}$.
2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe et est finie.

Exercice 2. [Correction] On va démontrer $\ln(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} o(\sqrt[3]{x})$

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall t > A, \frac{1}{t} \leq \frac{1}{t^{4/5}}$
2. En déduire qu'il existe une constante K tel que : $\forall x > A, \ln(x) \leq K + 5x^{1/5}$
3. En déduire que : $\ln(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} o(\sqrt[3]{x})$
4. **Bonus** : Démontrer que : Si $\alpha > 0$, alors $\ln(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} o(\sqrt[\alpha]{x})$

Exercice 3. [Correction] Classique

1. Soit f une fonction avec $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \ell$ et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(2x) = f(x)$
On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x > 0$ et $\forall n, u_{n+1} = 2u_n$,
 - (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
En déduire la limite suite $(f(u_n))$.
 - (b) D'autre part, montrer que la suite $(f(u_n))$ est constante et déterminer sa limite.
 - (c) Justifier que la fonction f est constante égale à ℓ .
2. Soit f une fonction avec $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \ell$ et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$.
 - (a) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x > 0$ et $\forall n, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
Calculer u_n en fonction de n . En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 6.
 - (b) En utilisant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que la fonction f est constante égale à $f(6)$.

Exercice 4. [Correction]

1. Soit f une fonction k -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, CàD $\forall x, x' \in \mathbb{R}, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$
Montrer que la fonction f est continue en a , CàD $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, |f(x) - f(y)| < \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$$
 - (a) Que devient la relation quand $x \rightarrow 0$.
 - (b) Que eut-on conclure ?

————— Bonus. —————

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos x$ et que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} a$

1. Montrer, par récurrence, que : $\forall x \in \mathbb{R}$ avec $x \not\equiv 0 \pmod{[\pi]}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x) \frac{1}{2^n} \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}.$$

2. Déterminer $f(x)$ puis la fonction f

Exercice 6. D'après la banque CCP.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

Modélisation

On considère une fonction f définie, continue sur $\mathcal{D}$ et vérifiant $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = f(\varphi(x))$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, on a alors $f(u_n) = f(\varphi(u_n)) = f(u_{n+1})$

> D'une part. La suite $a_n = f(u_n)$ est constante ainsi $a_n = f(u_n) = a_0 = f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

> D'autre part. On étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on justifie que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1492$

Ainsi, par continuité, $a_n = f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(1492)$

Conclusion : Pour tout x , on a $f(x) = f(1492)$

Exercice 7. *Cesàro pour les fonction.*

Soit f une fonction $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction F définie par : $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$

On suppose que $f(t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

On fixe $\varepsilon > 0$

1. Montrer qu'il existe $C, A > 0$ tel que : Si $t \geq A$ alors $\frac{1}{x} [C - (x - A)\varepsilon] \leq F(t) \leq \frac{1}{x} [C + (x - A)\varepsilon]$
2. En déduire qu'il existe $A' > 0$ tel que : Si $t \geq A'$ alors $-2\varepsilon \leq F(t) \leq +2\varepsilon$.
Que peut-on conclure ?

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Démontrer qu'il existe $A > 0$ tel que : Si $t \geq A$, alors $e^{-t^2} \leq 3.e^{-t}$.

On considère $Q(t) = \frac{e^{-t^2}}{e^{3t}}$

On a $Q(t) = e^{-t^2+3t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ croissance comparée

On applique la définition de $Q(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ avec $\varepsilon = 1/2 > 0$

Ainsi il existe $A > 0$ tel que : $\forall t \geq A, Q(t) \leq \ell + \varepsilon = 0 + \frac{1}{2} < 1$

Conclusion : il existe $A > 0$ tel que : $\forall t \geq A, e^{-t^2} \leq 3.e^{-t}$.

2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe et est finie.

On intègre l'inégalité de $t = A$ à $t = x$, ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-t^2} dt + \int_A^x e^{-t^2} dt &\leq \int_0^A e^{-t^2} dt + \int_A^x 3.e^{-t} dt \\ &\leq K + 3 \left[-e^{-t} \right]_A^x \\ &\leq K + 3e^{-A} - 3e^{-x} \\ &\leq K + 3e^{-A} - 3.0 \end{aligned}$$

Conclusion : La fonction f est majorée.

De plus la fonction f est croissante au voisinage de $+\infty$.

Le théorème de la limite-monotone permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe et est finie.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall t > A, \frac{1}{t} \leq \frac{1}{t^{4/5}}$

On considère $Q(t) = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^{4/5}}} = \frac{1}{t^{1/5}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.

On applique la def de $Q(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, Ainsi

2. En déduire qu'il existe une constante K tel que : $\forall x > A, \ln(x) \leq K + 5x^{1/5}$

On intègre l'inégalité sur de $t = A$ à $t = x$,

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \ln(x) &= \int_1^A \frac{1}{t} dt + \int_A^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^A \frac{1}{t} dt + \int_A^x \frac{1}{t^{4/5}} dt \\ &\leq \int_1^A \frac{1}{t} dt + \left[\text{Primitive} \right]_A^x \end{aligned}$$

À finir

3. En déduire que : $\ln(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} o(\sqrt[3]{x})$

On doit montrer que : $Q(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} 0$

On va utiliser le thm des 2 gendarmes

On a pour tout $x > A, 0 \leq \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{K + 5x^{1/5}}{\sqrt[3]{x}}$

Comme $0 \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} 0$ et $\frac{K + 5x^{1/5}}{\sqrt[3]{x}} \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} 0$,

on a bien avec les gendarmes $\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} 0$

Conclusion : $\ln(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} o(\sqrt[3]{x})$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, ainsi $\forall n, u_n = 2^n u_0 = 2^n x$

Comme $x > 0$, on a $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$

En déduire la limite suite $(f(u_n))$.

Comme $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, on a par composition des limites : $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$

2. D'autre part, montrer que la suite $(f(u_n))$ est constante et déterminer sa limite.

pour tout/chaque n . On applique l'égalité " $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(2x) = f(x)$ " avec $x = u_n > 0$

Ainsi $f(u_n) = f(u_{n+1})$.

Donc la suite $(f(u_n))$ est constante et converge vers $f(u_0) = f(x)$

3. Justifier que la fonction f est constante égale à ℓ .

On a $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ et $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$

Donc par unicité de la limite $f(x) = \ell$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

Le raisonnement est valide pour tout/chaque $x > 0$

Conclusion : $\forall x > 0, f(x) = \ell$, CàD la fonction f est constante égale à ℓ sur $\mathbb{R}_+^*$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. On applique l'égalité avec $x' = a$

ainsi on a $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$

Comme $k|x - a| \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0$, le théorème de la distance assure que $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} f(a)$.

2. Que devient la relation quand $x \rightarrow 0$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\left. \begin{array}{l} |f(x) - f(y)| \leq \frac{x}{y} \\ |f(x) - f(y)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} |\ell - f(y)| \\ \frac{x}{y} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{À la limite, on a } |\ell - f(y)| \leq 0$$

Que eut-on conclure ?

Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, |\ell - f(y)| \leq 0$ La distance entre ℓ et $f(y)$ vaut 0 donc $f(y) = \ell$

Le raisonnement est valide pour tout $y \neq 0$

Conclusion : $\forall y \neq 0, f(y) = \ell$

CàD la fonction f est constante égale à ℓ sur $\mathbb{R}^*$

Bonus Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$, on a forcément $f(0) = \ell$

Donc la fonction f est constante égale à ℓ sur $\mathbb{R}$