

## TVI et copains.

### 1 TVI et ses applications.

|     |                                                  |   |
|-----|--------------------------------------------------|---|
| 1.1 | Le théorème et ses généralisations.              | 1 |
| 1.2 | Démonstration par dichotomie.                    | 1 |
| 1.3 | Démonstration avec les sup.                      | 2 |
| 1.4 | Image d'un intervalle par une fonction continue. | 3 |
| 1.5 | Théorème de la bijection monotone.               | 4 |

|     |                                                |   |
|-----|------------------------------------------------|---|
| 2   | Continue sur un segment.                       | 5 |
| 2.1 | Le théorème.                                   | 5 |
| 2.2 | Application à la norme infinie.                | 6 |
| 3   | Continuité, monotonie et bijection réciproque. | 7 |
| 4   | Exercices.                                     | 8 |

## 1 TVI et ses applications.

### 1.1 Le théorème et ses généralisations.

#### Théorème 1. Le Théorème des Valeurs Intermédiaires ou TVI

Soit  $f$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . On a

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f(a) > 0 \\ f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Il existe } c \in ]a, b[ \text{ tel que } f(c) = 0$$

Avec le TVI, on conclut : Il existe  $c \in \mathcal{D}$  avec une condition de type =

Généralisation : On peut remplacer  $<$  par  $\leq$ , on conclut alors  $c \in [a, b]$

On peut remplacer  $[a, b]$  par  $[a, b[$  ET  $f(b) < 0$  par  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} \ell < 0$

On peut utiliser avec  $b = +\infty$  par  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell < 0$

### 1.2 Démonstration par dichotomie.

C'est la démonstration qui correspond à la démarche informatique.

Il y a 3 étapes.

> Étape 1 : On construit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  avec des propriétés ad-oc.

> Étape 2 : On justifie que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes.

Ainsi elles convergent vers une même limite  $c$ .

> Étape 3 : On justifie que  $c \in ]a, b[$  et que  $f(c) = 0$ .

Étape 1 : Je choisis  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ . Je calcule  $f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right)$

$$\boxed{\text{Si } f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) > 0}$$

Je choisis  $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$  et  $b_1 = b_0$

$$\boxed{\text{Si } f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) < 0}$$

Je choisis  $a_1 = a_0$  et  $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$

$$\boxed{\text{Si } f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) = 0}$$

Alors  $c = \frac{a_0 + b_0}{2}$  convient  
Et le théorème est démontré.

On construit  $a_2$  et  $b_2$  en reproduisant le même schémas

**Conclusion :** On a construit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$

avec des propriétés qui vont être détaillées ci-dessous.

Étape 2 : On va montrer que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes

> Par construction, la suite  $(a_n)$  est croissante et la suite  $(b_n)$  est décroissante.

> De plus dans toutes les situations, on a

$$b_n - a_n = \frac{1}{2} (b_{n-1} - a_{n-1}) = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b_0 - a_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes.

Ainsi elles convergent vers une même limite  $c$ .

Étape 3 : Comme les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes

Donc elles convergent vers une même limite  $c$ .

>  $f(c) \geq 0$  ?

Par construction  $\forall n, f(a_n) > 0$  et  $f$  est continue donc  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow c]{} f(c)$ , ainsi

$$\left. \begin{array}{l} \forall n, f(a_n) > 0 \\ a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c \\ f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(c) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{À la limite } f(c) \underset{\text{Large}}{\geq} 0$$

>  $f(c) \leq 0$  ?

On suit la même démarche avec la suite  $(b_n)$ .

**Conclusion :**  $f(c) = 0$ .

>  $c \in ]a, b[$  ?

Comme les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes et convergent vers  $c$  donc

$$a = a_0 \leq \dots \leq a_n \leq c \leq b_n \leq \dots \leq b_0 = b$$

Enfin  $f(c) = 0 < f(a)$  et  $f(c) = 0 > f(b)$  donc  $c \neq a, b$  Donc  $c \in ]a, b[$

### 1.3 Démonstration avec les sup.

Voici le plan de la démonstration.

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  avec  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$

On va démontrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$ .

On considère l'ensemble  $E = \{x \in [a, b] \text{ tq } f(x) \geq 0\}$ .

1. Justifier que  $c = \sup(E)$  existe.

2. Comme  $c = \sup(E)$  est adhérente,

on sait qu'il existe une suite  $(e_n)$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, e_n \in E$  et  $e_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c$ .

En utilisant la suite  $(e_n)$ , on montre que  $c \in [a, b]$  et  $f(c) \geq 0$

3. En utilisant la suite  $\left(c + \frac{1}{n}\right)$ , on montre que  $f(c) \leq 0$ .

4. Conclure.

## 1.4 Image d'un intervalle par une fonction continue.

Pour comprendre cette section (non-essentielle), il faut comprendre ce qu'est un intervalle!!!!

### Définition 2. Un intervalle, c'est quoi?

Dans  $\mathbb{R}$  : Intuitivement un intervalle,

**C'est un ensemble de  $\mathbb{R}$  sans trou!!!**

> La définition rigoureuse :  $I$  est un intervalle Ssi

$$\text{Ssi } \forall x, y, (x, y \in I \implies [x, y] \subset I)$$

> Interprétation de la définition. On suppose que  $\mathcal{D}$  est troué.

Je choisis  $x, y \in \mathcal{D}$  tel que  $x < \text{trou} < y$ . On a alors

$$x, y \in \mathcal{D} \text{ mais aussi } \text{trou} \in [x, y] \text{ et } \text{trou} \notin \mathcal{D} \text{ donc } [x, y] \not\subset \mathcal{D}!!!!$$

> Exemples :

$\mathbb{R} = ]-\infty, \infty[$  est un intervalle Càd pas de trou.

$\mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  est troué.

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\} = \dots \cup \{-2\} \cup \{-1\} \cup \{0\} \cup \dots$  est plein de trou.

$\mathbb{Q}$  est plein de trou mais ils sont plus difficile à "voir" que ceux de  $\mathbb{Z}$

**Théorème.** Soit  $I$  un intervalle.

Je note  $a = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

On a alors :

Soit  $I = [a, b]$ , Soit  $I = ]a, b]$ , Soit  $I = [a, b[$ , Soit  $I = ]a, b[$

Conséquence : Les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont de la forme

> Les intervalles ouvert  $] -\infty, \infty[$ ,  $] -\infty, b[$ ,  $] a, \infty[$

> Les intervalles semi-ouvert  $] -\infty, b]$ ,  $] a, b]$ ,  $[ a, b[$ ,  $[ a, \infty[$

> Les Segments, CàD les intervalles fermés et bornés, CàD  $[a, b]$

**Démonstration :** La démonstration du théorème. Soit  $I$  un intervalle.

Je note  $a = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Il y a 4 situation  $[a \in I \text{ ou } a \notin I]$  ou  $[b \in I \text{ ou } b \notin I]$ .

On suppose que  $a \in I$  et  $b \notin I$

On va montrer que :  $I = [a, b[$

On fait  $\subset$  et  $\supset$ .

À finir. la démo est dans le poly 13-3-N,Z,R.

Essayer de la refaire c'est un exercice de manipulation des propriétés des sup et des inf.

**Théorème 3. L'image d'un intervalle, c'est ....**

Soit  $f$  une fonction définie de  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$

On a alors

$$\left. \begin{array}{l} I \text{ est intervalle, } \text{CàD n'a pas de trou} \\ \text{La fonction } f \text{ est continue} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f), \text{ l'image de } f, \text{ est un intervalle. } \text{CàD n'a pas de trou}$$

Exemples d'application.

> Soit  $f$  une fonction continue de  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$

Alors  $\text{Im}(f)$  est réduit à un seul élément, CàD la fonction  $f$  est constante.

Argument intuitif :  $\text{Im}(f)$  n'a pas de "trou" et  $\text{Im}(f) \subset \mathbb{Z}$  donc ....

Rédaction rigoureuse : RA + TVI.

> Une fonction continue sur intervalle qui s'annule pas est forcément de signe constant.

Argument intuitif : Sinon 0 fait un "trou" dans  $\text{Im}(f)$ .

Rédaction rigoureuse : RA + TVI.

Démonstration : Soit  $b, b' \in \text{Im}(f)$

On va montrer que  $[b, b'] \in \text{Im}(f)$ , CàD  $\forall y \in [b, b'], y \in \text{Im}(f)$ .

Soit  $y \in [b, b']$ .

On va montrer que :  $y \in \text{Im}(f)$

On va appliquer le TVI à la fonction  $h(t) = f(t) - y$ .

> Comme  $b \in \text{Im}(f)$ , il existe  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = b$

Ainsi on a  $h(\alpha) = f(\alpha) - y = b - y < 0$

> Comme  $b' \in \text{Im}(f)$ , il existe  $\alpha'$  tel que  $f(\alpha') = b'$

Ainsi on a  $h(\alpha') = f(\alpha') - y = b' - y > 0$

> La fonction  $h$  est continue sur  $[\alpha, \alpha']$

**Conclusion :** D'après le TVI, il existe  $c \in [\alpha, \alpha']$  tel que  $h(c) = 0 \iff y = f(c)$

Donc  $y \in \text{Im}(f)$  Fini

## 1.5 Théorème de la bijection monotone.

**Théorème 4. Théorème de la bijection monotone**

Soit  $f$  une fonction de  $[a, b[$ .

On suppose que, sur  $[a, b[$ , la fonction  $f$  est strictement croissante et continue

Alors la fonction  $f$  réalise une bijection de  $[a, b[$  sur  $\left[ f(a), \lim_{b^-} f \right[$

Démonstration :

$f$  est injective ?

Comme la fonction  $f$  est strictement croissante, la fonction  $f$  est injective. Déjà vu et déjà démontré.

$f$  est surjective ?

Par définition de  $\text{Im}(f)$ , la fonction est surjective sur  $\text{Im}(f)$

$\text{Im}(f) = \left[ f(a), \lim_{b^-} f \right[$  ?

Le théorème de la limite monotone assure  $\lim_{b^-} f = \ell$  existe.

On doit démontrer que  $\text{Im}(f) = [f(a), \ell[$ .

On fait  $\subset$  et  $\supset$  et on utilise le TVI.

## 2 Continue sur un segment.

### 2.1 Le théorème.

#### **Théorème 5. Bornée et atteint ses bornes**

Soit  $f$  une fonction continue sur le segment  $[a, b]$

alors la fonction  $f$  est bornée sur  $[a, b]$ , CàD

Il existe  $m, M$  tel que :  $\forall t \in [a, b], m \leq f(t) \leq M$

De plus elle atteint ses bornes,

CàD il existe  $\alpha, \beta \in [a, b]$  tel que  $m = f(\alpha)$  et  $M = f(\beta)$

Ce théorème permet de montrer :

~~au voisinage~~ une inégalité du type  $expression \leq M$

#### Démonstration

La démonstration est difficile et non-exigible!!!!

On suppose que la fonction  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$

On va montrer que  $M = \sup(f(t), t \in [a, b])$  est  $< \infty$  et qu'il existe  $\beta$  tel que  $M = f(\beta)$ .

Étape 1. Comme  $M = \sup$ , on sait que  $M$  est adhérent,

Ainsi il existe une suite  $(t_n)$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \in [a, b]$  et  $f(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M$ .

Étape 2. Comme  $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \in [a, b]$ , on sait d'après Bolzano-Weierstrass

qu'il existe une suite extraite  $(t_{\varphi(n)})$  qui converge vers une limite que je note  $\beta$ .

Ainsi  $t_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$ .

Étape 3. Conclusion. On va montrer que  $\beta \in [a, b]$  et  $f(\beta) = M$  et que  $M < \infty$

> On a  $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq t_{\varphi(n)} \leq b$  et  $t_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$ ,

Ainsi à la limite, on a  $a \leq \beta \leq b$ .

> On a : D'une part  $f(t_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M$

et d'autre part  $t_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$  et  $f$  est continue en  $\beta$  donc  $f(t_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\beta)$

Par unicité de la limite, on a  $f(\beta) = M$

Conclusion : on vient de trouver/construire  $\beta \in [a, b]$  tel que  $f(\beta) = M$ .

comme  $f$  est définie en  $\beta$ , on a bien  $M = f(\beta) < \infty$

## 2.2 Application à la norme infinie.

### Définition 6. La norme infinie

Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{D}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

La norme infinie de  $f$  sur  $\mathcal{D}$ , notée  $\|f\|_\infty$  ou  $\|f\|_{\infty, \mathcal{D}}$ , c'est

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &= \|f\|_{\infty, \mathcal{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup(|f(t)|, \text{ pour } t \in \mathcal{D}) \\ &= \text{le majorant optimal de } |f(t)| \text{ sur } \mathcal{D}\end{aligned}$$

### Propriétés de $\|f\|_\infty$ .

- > Existe. Dans  $\mathbb{R}$ , certe le sup existe dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$   
Donc par défaut, CàD sans argument supplémentaire, on a  $\|f\|_\infty = +\infty$ .
- > Majoré. Le majorant optimal est un majorant,  
Ainsi on a :  $\forall t \in \mathcal{D}, |f(t)| \leq \|f\|_\infty$  et  $\|f\|_\infty$  ne dépend pas de  $t$ .
- > Optimal. C'est le meilleur d'entre tous!!!

### Théorème 7.

Soit  $f$  une fonction

On suppose que la fonction  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$

$$\text{Alors } \|f\|_\infty <_{\text{strict}} \infty$$

Généralisation.

$$\left. \begin{array}{l} \text{la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell' \end{array} \right\} \Rightarrow \|f\|_\infty <_{\text{strict}} \infty$$

**Démonstration :** Comme la fonction  $f$  est continue, alors la fonction  $|f|$  est aussi continue.

Ainsi la fonction  $|f|$  est aussi continue sur le segment  $[a, b]$  donc elle est majorée

CàD il existe  $M$  tel que  $\forall t \in [a, b], |f(t)| \leq M$ .

Or  $\|f\|_\infty$  est optimal, on a donc  $\|f\|_\infty \leq M < \infty$

### Théorème 8. $\mathcal{C}^1$ sur une segment $\Rightarrow$ Lipschitzienne

Soit  $f$  une fonction

On suppose que la fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[a, b]$

Alors  $\|f'\|_\infty < \infty$  et la fonction  $f$  est  $\|f'\|_\infty$ -lipschitzienne.

**Démonstration :** La fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  donc la fonction  $f'$  est continue sur le segment  $[a, b]$

Donc le théorème précédent assure que  $\|f'\|_\infty < \infty$

Pour tout  $x, x' \in [a, b]$ , on a

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x')| &= \left| \int_x^{x'} f'(t) dt \right| \\ &\leq \int_x^{x'} |f'(t)| dt \\ &\leq \int_x^{x'} \|f'\|_\infty dt \\ &\leq \|f'\|_\infty (x - x') = \|f'\|_\infty |x - x'|\end{aligned}$$

### 3 Continuité, monotonie et bijection réciproque.

#### Théorème 9.

Soit  $I$  un intervalle et  $f$  une fonction de  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On a équivalence

- (i)  $f$  est strictement monotone sur  $I$       (ii)  $f$  est injective sur  $I$ .

Démonstration : On a déjà fait (i)  $\implies$  (ii) dans le cours sur l'injectivité.

La démonstration de (ii)  $\implies$  (i) n'est pas exigible car avec les notions de sup, elle est lourde à rédiger.

Je vais faire celle de spé.

On considère  $\mathcal{A} = \{f(x) - f(y) \text{ avec } x, y \in I^2 \text{ et } x < y\}$

On a alors

> Comme  $\{(x, y) \in I^2 \text{ et } x < y\}$  est "d'un seul morceau" et que  $f$  est continue,

Alors  $\mathcal{A}$  est d'un seul morceau.

Remarque : Un seul morceau se dit connexe en spé

> Comme  $\mathcal{A}$  est d'un seul morceau et que  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ ,

alors  $\mathcal{A}$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

> De plus, comme  $f$  est injective,  $0 \notin \mathcal{A}$ .

**Conclusion :**  $\mathcal{A}$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  qui ne contient pas 0 donc : Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_-^*$ , Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+^*$ .

Situation  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_-^*$

On a que : pour tout  $x < y$  alors  $f(x) - f(y) < 0$ . La fonction est donc croissante.

Situation  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+^*$

On a que : pour tout  $x < y$  alors  $f(x) - f(y) > 0$ . La fonction est donc décroissante.

#### Théorème 10.

Soit  $I$  un intervalle et  $f$  une fonction **croissante** de  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On a équivalence

- (i)  $f$  est continue sur  $I$ .      (ii)  $f(I)$  est un intervalle.

Démonstration : On a fait la démonstration de (i)  $\implies$  (ii) dans la section TVI.

Pour démontrer (ii)  $\implies$  (i) on fait un R.A.

On suppose donc que :  $f(I)$  est un intervalle et que  $f$  n'est pas continue.

On sait que

$f$  est croissante alors :  $\forall c \in I, \lim_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim_{c^+} f$

$f$  est continue Ssi  $\forall c \in I, \lim_{c^-} f = f(c) = \lim_{c^+} f$

Ici  $f$  est croissante et non continue donc il existe  $c \in I$  avec  $\lim_{c^-} f < f(c)$  ou  $f(c) < \lim_{c^+} f$

> Situation  $\lim_{c^-} f < f(c)$ .

Comme  $f$  est croissante,  $x < c \implies f(x) \leq \lim_{c^-} f$

et  $x \geq c \implies f(x) \geq f(c)$ , ainsi  $f(I)$  n'est pas un intervalle absurde.

> On fait de même dans l'autre situation.

#### Théorème 11. Continuité de la bijection réciproque

Soit  $I = [a, b]$  un intervalle.

Soit  $f$  une fonction strictement croissante et continue sur  $I$

alors  $f$  réalise une bijection de l'intervalle  $I = [a, b]$  sur  $J = \left[ f(a), \lim_{b^-} f \right]$   
De plus la bijection réciproque  $f^{-1}$  est continue sur  $J$

Démonstration : La seule chose qu'il reste à justifier, c'est la continuité de  $f^{-1}$ .

On sait que

> Comme  $f$  est croissante donc  $f^{-1}$  est croissante

> Comme  $f$  est bijective de  $I$  sur  $J$  donc  $f^{-1}$  est bijective de  $J$  sur  $I$

et donc  $f^{-1}(J) = I$  est un intervalle.

Ainsi d'après le théorème précédent,  $f^{-1}$  est continue.

## 4 Exercices.

### TVI classique

#### Exercice 1.

1. Soit  $f$  une fonction continue de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$ .  
Montrer qu'il existe un point fixe, CàD il existe  $c \in [0, 1]$  tel que  $f(c) = c$ .
2. Soit  $f$  une fonction continue de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que  $f(0) = f(1)$ .  
Montrer qu'il existe  $c \in [0, 1]$  tel que  $f(c) = f(c + 1/2)$ .
3. une personne parcourt 4 km en 1 heure.  
Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

**Exercice 2.** On considère une fonction  $f$  continue de  $[0, +\infty[$  à valeurs dans  $[0, +\infty[$ .

On suppose que  $f(0) = 1$  et que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

De plus on suppose que  $f(1) = 2$ .

1. Démontrer qu'il existe  $a \in ]0, 1[$  tel que  $f(a) = 3/2$
2. Démontrer qu'il existe  $b \in ]1, +\infty[$  tel que  $f(b) = 3/2$

**Exercice 3.** Soit  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$ .

Montrer qu'il existe  $a \in [0, 1]$  tel que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a - a_k| = \frac{1}{2}$

**Exercice 4.** Soit  $f$  une fonction continue de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$ .

Montrer qu'il existe  $c \in [0, 1]$  tel que  $f(c) = \frac{e^c - 1}{e - c}$ .

**Exercice 5.** Soit  $P$  un polynôme de degré 3

Démontrer, à l'aide du TVI sur  $] -\infty, +\infty[$ , que  $P$  admet forcément une racine réelle.

Généraliser avec un polynôme de degré  $n$  impaire.

**Exercice 6.** Lemme de la corde ("facile")

On considère une fonction  $f$  continue sur  $\mathcal{D} = [0, 1]$  avec  $f(0) = f(1) = 0$ .

#### 1. Lemme de la corde "facile"

On suppose que :  $f$  est à valeur dans  $\mathbb{R}^+$  et on prend  $\lambda \in ]0, 1[$

Montrer qu'il existe  $x_0 \in [0, 1]$ , tel que  $f(x_0 + \lambda) = f(x_0)$ .

#### 2. Lemme de la corde (difficile)

On suppose que :  $f$  est à valeur dans  $\mathbb{R}$

On considère la fonction  $\phi$  définie par  $\phi(x) = f(x + 1/n) - f(x)$ .

(a) Calculer  $\phi\left(\frac{0}{n}\right) + \phi\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + \phi\left(\frac{n-1}{n}\right)$ .

(b) Est-il possible que

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}, \phi\left(\frac{k}{n}\right) > 0?$$

(c) Montrer qu'il existe  $x_0 \in [0, 1]$ , tel que  $f(x_0 + 1/n) = f(x_0)$ .

## Application moins évidentes du TVI

**Exercice 7.** On considère une fonction  $f$  continue de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .

1. A l'aide d'une RA et en utilisant le TVI, Montrer que la fonction  $f$  est constante.
2. Est ce que le résultat est encore valable quand on suppose que la fonction  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ .

**Exercice 8.**

1. **Bien utile.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  un intervalle et qui ne s'annule pas.  
Montrer que la fonction  $f$  est de signe constant, CàD soit positive de  $I$  ou soit négative sur  $I$ .
2. Application. Soit  $f$  une fonction continue  
Montrer que : Si  $f^2(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$  alors soit  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$ , soit  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -1$

## Continue sur un segment

**Exercice 9.** Soit  $f, g$  deux fonctions continues de  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et que  $f < g$  sur  $[a, b]$ .

Montrer qu'il existe  $m > 0$

tel que  $\forall x \in [a, b]$  tel que  $f(x) + m \leq g(x)$

**Exercice 10.** Soit  $f, g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est bornée et  $g$  est continue.

1. Montrer que  $f \circ g$  est bornée.
2. Montrer que  $g \circ f$  est bornée.

## Synthèse

**Exercice 11.** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ , avec  $a < b$ . Soit  $f, g$  des fonctions continue sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que :  $\forall x \in [a, b], \exists x' \in [a, b]$  tel que  $f(x) = g(x')$

On va montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = g(c)$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \neq g(x)$

1. Montrer qu'alors  $f - g > 0$ .  
(a) Montrer que  $f$  et  $g$  possèdent chacune un maximum sur  $[a, b]$ . On les notera  $M_f$  et  $M_g$ .  
(b) Montrer que  $M_f < M_g$  et conclure.
2. Retrouver le résultat si  $f - g < 0$ .

## Bijection réciproque.

**Exercice 12.** On pose  $f(x) = \ln(1 - \ln(x))$ .

1. Donner l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{A}$  que l'on déterminera.
3. Expliciter l'application  $f^{-1}$ .

Correction.