

Exercice 1. [Correction] Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. Étudier les fonctions $f : x \mapsto \arctan(x)$ et $h : x \mapsto f(x) - x$
2. Convergence.
 - (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
 - (b) Déterminer les limites possibles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (c) Déterminer le signe de $u_1 - u_0$ en fonction de la valeur de x_0 .
 - (d) Discuter en fonction de u_0 , la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (e) Montrer que (u_n) converge vers 0.
3. On suppose que h est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\arctan x)$.
On considère la suite (a_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = h(u_n)$
 - (a) Que signifie la fonction h est continue en 0 .
Justifier que la suite (a_n) converge vers $h(0)$
 - (b) Montrer que la suite (a_n) est constante. La suite (a_n) converge-t-elle ?
 - (c) Conclusion Déterminer les fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\arctan x)$.
4. **Bonus** On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha$
 - (a) Montrer qu'il existe un unique α tel que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \neq 0$.
Indication : $v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha = (\arctan u_n)^\alpha - (u_n)^\alpha$ et on fera une DL avec $\square = u_n$.
 - (b) En utilisant le théorème de Césàro, montrer que : $\frac{v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.
 - (c) En déduire l'équivalent de u_n .
 - (d) Déterminer la nature la nature de la série $\sum u_n$.

— Révision, si le cœur vous en dit. —

Exercice 2. [Correction] Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\forall x, y \in]0, +\infty[, \quad f(xy) = xf(y) + yf(x) \quad (E)$$

1. Déterminer les/la valeurs possible de $f(1)$.
2. On suppose que f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifie la relation (E)
 - (a) On note $\alpha = f'(1)$.
Démontrer que la fonction f est solution sur $]0, +\infty[$ de l'EDL1 : $tz' - z = \alpha t$
 - (b) Résoudre cette EDL1 sur $\mathcal{D} =]0, +\infty[$
 - (c) Déterminer les fonctions f qui sont solutions du problème.
3. On suppose que f est seulement continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation (E)
Déterminer f

————— Pour aller plus loin —————

Exercice 3. [Correction] On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n, u_{n+1} = \frac{n+1}{\sqrt{u_n}}$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et est strictement positive.
 (b) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et n . En déduire que la suite (u_{2n}) est croissante et diverge vers $+\infty$
On admet de même que la suite (u_{2n+1}) est croissante et diverge vers $+\infty$
 (c) Montrer que : si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda \cdot n^\alpha$ avec $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\lambda = 1$ et $\alpha = 2/3$
 (d) On admet que $2^{2/3} \leq u_2 \leq (2+1)^{2/3}$. Montrer que $\forall n \geq 2, n^{2/3} \leq u_n \leq (n+1)^{2/3}$
 En déduire un équivalent de u_n

2. (a) Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln(n-k)$
 (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{u_n}{n^{2/3}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) - \frac{2 \ln(n)}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

On admet momentanément que pour tous $n \geq 2$ et $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, $|\ln(1-x) + x| \leq 4x^2 \ln(n)$

3. (a) Montrer que la série $\sum k \left(\frac{-1}{2}\right)^k$ converge.

Montrer, à l'aide d'une ré-indexation, que $\sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{-1}{2}\right)^k = \frac{-2}{9}$

- (b) Montrer qu'il existe une constante A tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq A$.

- (c) En déduire que : $n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{9}$

Rappel/Remarque : $\sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{-1}{2}\right)^k = \frac{-2}{9}$, signifie que la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n k \left(\frac{-1}{2}\right)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{9}$

- (d) Soient (a_n) et (b_n) deux suites qui ne s'annulent pas, qui converge vers 0 et avec $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n$

Montrer que : $e^{a_n} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n$

En déduire un équivalent de $u_n - n^{2/3}$

4. Compléments

- (a) En étudiant la fonction $h : x \mapsto 4x^2 \ln(n) + \ln(1-x) + x$, montrer l'inégalité admise.

- (b) Démontrer, sans récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln(n-k)$

Indication : La suite $a_n = \ln(u_n)$, vérifie une relation de récurrence de type arithmético-géo
 et de solution homogène $H_n = \lambda \left(\frac{-1}{2}\right)^n$.

Suivant l'idée de la méthode de variation de la constante,

on cherche le solution de la relation de récurrence de la forme $a_n = c_n \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Étudier les fonctions $f : x \mapsto \arctan(x)$ et $h : x \mapsto f(x) - x$

On étudie les fonctions et on trouve

x	$-\infty$	0	∞
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\text{signe de } f(x)$	$-$	$+$	

x	$-\infty$	0	∞
$h(x) = \arctan(x) - x$	$+\infty$	0	$-\infty$
$\text{signe de } h(x)$		$+$	$-$

2. Convergence de la suite (u_n) .

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

On pourrait se contenter de "Comme $f = \arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie."

On va pour plus de clarté faire par récurrence $H_{<n>}$: le nombre u_n se calcule.

Initialisation avec $n = 0$

Comme $u_0 = x \in \mathbb{R}$, le nombre u_0 se calcule.

Hérédité. On suppose $H_{<n>}$

le nombre u_n se calcule et la fonction $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$

Donc le nombre u_{n+1} se calcule et $H_{<n+1>}$ est vraie

(b) Déterminer les limites possibles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ ET la fonction f continue

Donc les limites ℓ possibles vérifient l'équation $\ell = f(\ell)$

$$\ell = f(\ell) \iff h(\ell) = 0 \iff \ell = 0 \text{ Voir Q1 et le thm de la bijection monotone}$$

(c) Déterminer le signe de $u_1 - u_0$ en fonction de la valeur de x_0 .

On a $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = h(u_0)$

Ainsi d'après Q1, on a

Si/lorsque $u_0 > 0$, alors $u_1 - u_0 < 0$

Si/lorsque $u_0 < 0$, alors $u_1 - u_0 > 0$

Si/lorsque $u_0 = 0$, alors $u_1 - u_0 = 0$, CàD $u_1 = u_0 = 0$

(d) Discuter en fonction de u_0 , la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il y a 3 situations à faire selon que $u_0 < 0$, $u_0 > 0$ ou $u_0 = 0$

On va faire uniquement lorsque $u_0 > 0$ et on va faire par récurrence $H_{<n>}$: $u_{n+1} \leq u_n$

Initialisation avec $n = 0$

RAS car on est dans la situation $u_1 - u_0 < 0$

Hérédité. On suppose $H_{<n>}$

On a

$$\left. \begin{array}{l} u_{n+1} \leq u_n \\ \text{la fonction } \arctan \text{ est croissante} \end{array} \right\} \implies \underbrace{\arctan(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} \leq \underbrace{\arctan(u_n)}_{=u_{n+1}}$$

Donc $H_{<n+1>}$ est vrai et **La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante**

Lorsque $u_0 < 0$, on fait de même et on conclut que La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Lorsque $u_0 = 0$, on fait de même et on conclut que La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 0.

(e) Montrer que (u_n) converge vers 0.

Il y a 3 situations à faire selon que $u_0 < 0$, $u_0 > 0$ ou $u_0 = 0$

On va faire uniquement lorsque $u_0 > 0$

On sait déjà que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Comme $u_{n+1} = \arctan(u_n) = \arctan(\square) \geq -\frac{\pi}{2}$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0

Donc elle converge vers $\ell = 0$ car $\ell = 0$ est la seule limite possible

3. On suppose que h est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

On considère la suite (a_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = h(u_n)$

(a) Que signifie la fonction h est continue en 0

la fonction h est continue en 0 Ssi $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} h(0)$

Justifier que la suite (a_n) converge vers $h(0)$

On sait que : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} h(0)$

Donc par composition des limites, on a $a_n = h(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(b) Montrer que la suite (a_n) est constante.

Pour tout/chaque n .

On a appliqué la relation avec $x = u_n$, ainsi $h(\arctan(u_n)) = h(u_n)$

Conclusion : $a_{n+1} = a_n$ et la suite (a_n) est constante.

La suite (a_n) converge-t-elle ?

La suite (a_n) est constante donc elle converge vers $a_0 = h(x)$

(c) Conclusion Déterminer les fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

On sait que : $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(0)$ et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(x)$

Par unicité de la limite, on a $h(x) = h(0)$

Le raisonnement est valide pour tout x , Conclusion : la fonction est constante

C'est la fin de l'analyse, reste la synthèse.

4. Équivalent du nombre u_n quand $n \rightarrow \infty$

On considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha$$

(a) Montrer qu'il existe un unique α tel que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \neq 0$.

On a

$$\begin{aligned} v_n &= (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha = (\arctan u_n)^\alpha - (u_n)^\alpha \\ &= \left(u_n - \frac{(u_n)^3}{3} + o[(u_n)^3] \right)^\alpha - (u_n)^\alpha \\ &= (u_n)^\alpha \left(1 - \frac{(u_n)^2}{3!} + o[(u_n)^2] \right)^\alpha - (u_n)^\alpha \\ &= (u_n)^\alpha [1 + \alpha \square + o(\square)] - (u_n)^\alpha \\ &= (u_n)^\alpha \left[1 + \alpha \left(-\frac{(u_n)^2}{3} \right) + o[(u_n)^2] \right] - (u_n)^\alpha \\ &= \frac{-\alpha (u_n)^{2+\alpha}}{3} + o[(u_n)^2] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\alpha (u_n)^{2+\alpha}}{3} \end{aligned}$$

> Situation 1. On suppose que $\alpha < -2$ alors $2 + \alpha < 0$ donc $v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$

> Situation 2. On suppose que $\alpha = -2$ alors donc $v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{2}{3}$

> Situation 3. On suppose que $\alpha > -2$ alors $2 + \alpha > 0$ donc $v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

(b) En utilisant le théorème de Cesàro, montrer que : $\frac{v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$.

Je choisis $\alpha = -2$, ainsi on a $\ell = \frac{2}{3}$.

> Comme $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{3}$, on a $\frac{v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{2}{3}$

(c) En déduire l'équivalent de u_n .

On a

$$\begin{aligned} \frac{v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}}{n} &= \frac{((u_1)^\alpha - (u_0)^\alpha) + ((u_2)^\alpha - (u_1)^\alpha) + \dots + ((u_n)^\alpha - (u_{n-1})^\alpha)}{n} \\ &= \frac{(u_n)^\alpha - (u_0)^\alpha}{n} \quad \text{avec } \alpha = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Conclusion : } \frac{(u_n)^{-2} - (u_0)^{-2}}{n} &= \frac{2}{3} + o(1) \\ \implies \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} &= \frac{2}{3}n + o(n) \\ \implies \frac{1}{u_n^2} &= \frac{2}{3}n + o(n) \quad \text{car } -\frac{1}{u_0^2} = o(n) \\ \implies u_n^2 &= \frac{1}{\frac{2}{3}n + o(n)} = \frac{1}{\frac{2n}{3}[1 + o(1)]} = \frac{3}{2n}[1 + o(1)] \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } u_n = \sqrt{\frac{3}{2n}[1 + o(1)]} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{2n}}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Déterminer les/la valeurs possible de $f(1)$.

J'applique l'égalité avec $x = y = 1$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi } f(1.1) &= 1.f(1) + 1.f(1) \\ \implies f(1) &= 2f(1) \\ \implies f(1) &= 0\end{aligned}$$

2. On suppose que f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifie la relation (E)

- (a) On note $\alpha = f'(1)$. Démontrer que la fonction f est solution sur $]0, +\infty[$ de l'EDL1 : $tz' - z = \alpha t$

Je dérive l'égalité en x

$$\begin{aligned}\text{Ainsi } \frac{d}{dx} [f(xy)] &= \frac{d}{dx} [xf(y) + yf(x)] \\ \implies y f'(xy) &= f(y) + y f'(x)\end{aligned}$$

On applique cette égalité avec $x = 1$ et $y = t$, ainsi

$$\begin{aligned}t f'(t) &= f(t) + t f'(1) \\ \text{On a bien } \forall t > 0, \quad t f'(t) - f(t) &= \alpha t\end{aligned}$$

- (b) Résoudre cette EDL1 sur $\mathcal{D} =]0, +\infty[$

Sur $\mathcal{D} =]0, +\infty[$, on résout l'EDL1 complète $tz' - z = \alpha t \iff z' - \frac{1}{t}z = \alpha$

> Équation homogène

comme une primitive de $a(t) = \frac{-1}{t}$ est $A(t) = -\ln|t|$,

On a : $\forall t > 0, h(t) = K e^{-A(t)} = K t$ avec $K \in \mathbb{R}$

> Solution particulière y_p

On cherche y_p de la forme $y_p(t) = C(t)t$

Comme $ty_p' - y_p = \alpha t$, on obtient $C'(t)t^2 = \alpha y \iff C'(t)\frac{\alpha}{t}$

Je choisis $C(t) = \alpha \ln(t)$. Ainsi $y_p(t) = C(t)t = \alpha t \ln|t|$ convient

Conclusion : Les sol sont : $\forall t > 0, z(t) = \alpha t \ln(t) + Kt$ avec $K \in \mathbb{R}$

- (c) Déterminer les fonctions f qui sont solutions du problème.

Comme les solutions du problème vérifient $f(1) = 0$, on doit avoir $K = 0$

Donc les solutions du problème sont de la forme $\forall t > 0, f(t) = \alpha t \ln(t)$

et il est facile de vérifier que ces fonctions sont effectivement solutions du problème

Conclusion : les solutions du problème sont : $\forall t > 0, f(t) = \alpha t \ln(t)$

3. BONUS : On suppose que f est seulement continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation (E)

Comme f est continue sur $]0, +\infty[$, elle admet, sur $]0, +\infty[$, des primitive $\mathfrak{F}$
et on note H l'une d'elle

> Je primitive $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ en la variable x

$$\text{Ainsi on a : } \forall x, y > 0, \quad \frac{H(xy)}{y} = \frac{x^2}{2}f(y) + xH(y)$$

> J'applique avec $x = 1$ et $y = t$

$$\begin{aligned}\text{ainsi on a } \frac{H(t)}{t} &= \frac{1}{2}f(t) + H(t) \\ \implies \forall t > 0, \quad f(t) &= \frac{2H(t)}{t} - 2H(t)\end{aligned}$$

Conclusion : f s'exprime à l'aide de fonction dérivables

ainsi f est dérivable et la conclusion Q2c est encore valide.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et est strictement positive.

On montre par récurrence $H_{<n>}$ le nombre u_n se calcule et $u_n > 0$

- (b) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et n . En déduire que la suite (u_{2n}) est croissante et diverge vers $+\infty$

$$\text{On a } u_{n+2} = \frac{n+2}{\sqrt{n+1}} \sqrt{\sqrt{u_n}}$$

On fait par récurrence $H_{<n>} : u_{2n+2} \geq u_{2n}$

$$\text{On a } u_1 = 2 \text{ et } u_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} > 1 = u_0 \text{ donc } H_{<0>} \text{ est vrai}$$

On suppose $H_{<n>}$, on a

$$u_{2n+2} = \frac{2n+2}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{\sqrt{u_{2n}}}$$

> Avec une étude de fonction simple, on vérifie que la fonction $h : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ est croissante sur $[2, +\infty[$

$$\text{Ainsi } \frac{2n+2}{\sqrt{2n+1}} = h(2n+2) \geq h(2n) = \frac{2n}{\sqrt{2n-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{Et avec } H_{<n>}, \sqrt{\sqrt{u_{2n}}} &\geq \sqrt{\sqrt{u_{2n-2}}} \\ &\geq \frac{2n}{\sqrt{2n-1}} \sqrt{\sqrt{u_{2n-2}}} = u_{2n} \end{aligned}$$

Donc $H_{<n+1>}$ est vraie. Conclusion : La suite (u_{2n}) est croissante

Enfin comme la suite est croissante, on a

$$u_{2n} = \frac{2n}{\sqrt{2n-1}} \sqrt{\sqrt{u_{2n-2}}} \geq \frac{2n}{\sqrt{2n-1}} \sqrt{\sqrt{u_0}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Conclusion : la suite (u_{2n}) est croissante et diverge vers $+\infty$

On admet de même que la suite (u_{2n+1}) est croissante et diverge vers $+\infty$

- (c) Montrer que : si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda.n^\alpha$ avec $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\lambda = 1$ et $\alpha = 2/3$

On suppose que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \lambda.n^\alpha[1 + o(1)]$, ainsi

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{n+1}{\sqrt{u_n}} &\iff \lambda.(n+1)^\alpha[1 + o(1)] = \frac{n+1}{\sqrt{\lambda.n^\alpha[1 + o(1)]}} \\ &\iff \lambda.n^\alpha[1 + o(1)] = \frac{n^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\lambda}}[1 + o(1)] \\ &\implies \alpha = 1 - \frac{\alpha}{2} \text{ et } \lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{Unicité des développements} \end{aligned}$$

Conclusion : $\lambda = 1$ et $\alpha = 2/3$

- (d) Montrer que $\forall n \geq 2, n^{2/3} \leq u_n \leq (n+1)^{2/3}$

On fait par récurrence $H_{<n>} : n^{2/3} \leq u_n \leq (n+1)^{2/3}$

Initialisation avec $n = 2$ ok

On suppose $H_{<n>}$

Minoration ?

$$\text{On a avec } H_{<n>}, u_{n+1} = \frac{n+1}{\sqrt{u_n}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^{2/3}}} = (n+1)^{2/3}$$

Majoration ?

$$\text{On a avec } H_{<n>}, u_{n+1} = \frac{n+1}{\sqrt{u_n}} \leq \frac{n+1}{\sqrt{n^{2/3}}} = \text{Intermédiaire}$$

$$\text{de plus } \text{Final} - \text{Intermédiaire} = (n+2)^{2/3} - \frac{n+1}{\sqrt{n^{2/3}}} = \frac{(n+2)^{2/3}.n^{1/3} - (n+1)}{\sqrt{n^{2/3}}}$$

Comme tout est positif, on a

$$\begin{aligned} \text{signe}((n+2)^{2/3}.n^{1/3} - (n+1)) &= \text{signe}[(n+2)^2.n - (n+1)^3] \\ &= \text{signe}[n^3 + 4n^2 + 4n - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)] \\ &= \text{signe}[n^2 + n - 1] \\ &\geq 0 \quad \text{car } n \geq 2 \end{aligned}$$

Conclusion : $u_{n+1} \leq (n+2)^{2/3}$ et $H_{<n+1>}$ est vérifié

En déduire un équivalent de u_n

Comme $(n+1)^{2/3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{2/3}$, on a $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{2/3}$

2. (a) Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln(n-k)$

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{u_n}{n^{2/3}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) - \frac{2\ln(n)}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

$$\begin{aligned} \text{On a } \ln\left(\frac{u_n}{n^{2/3}}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln(n-k) - \frac{2}{3} \ln(n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) - \frac{2}{3} \ln(n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) + \ln(n) \frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)} - \frac{2}{3} \ln(n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) - \frac{2\ln(n)}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

On admet momentanément que pour tous $n \geq 2$ et $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, $|\ln(1-x) + x| \leq 4x^2 \ln(n)$

3. (a) Montrer que la série $\sum k \left(\frac{-1}{2}\right)^k$ converge.

On a $\left|k \left(\frac{-1}{2}\right)^k\right| = \frac{k}{2^k} = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$

La série $\sum \frac{1}{k^2}$ est positive et converge donc la série est A-cv

Montrer, à l'aide d'une ré-indexation, que $\sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{-1}{2}\right)^k = \frac{-2}{9}$

On a

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{-1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{-1}{2}\right)^k + \underset{k=0}{0}$$

On ré-indexe avec $p = k - 1$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) \left(\frac{-1}{2}\right)^{p+1}$$

Les séries qui suivent convergent donc on peut "distribuer"

$$= \frac{-1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} p \left(\frac{-1}{2}\right)^p + \frac{-1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^p$$

$$= \frac{-1}{2} S + \frac{-1}{2} \frac{1}{1 - \frac{-1}{2}}$$

$$\implies \frac{3}{2} S = \frac{-1}{3}$$

Conclusion : $S = \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{-1}{2}\right)^k = \frac{-2}{9}$

(b) Montrer qu'il existe une constante A tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq M$.

La série $\sum k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est à terme positif et converge

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Conclusion : $A = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k$ convient

En déduire qu'il existe une constante A tel que $\forall k \in \mathbb{N}, k^2 \leq A \left(\frac{3}{2}\right)^k$

Je choisis $A = \max \left(M, \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^1}, \dots, \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{N_0}} \right)$

Il est clair que A convient.

(c) En déduire que : $n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln \left(1 - \frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{9}$

$$\begin{aligned} \text{On a } \left| n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln \left(1 - \frac{k}{n}\right) + \sum_{k=0}^n k \left(\frac{-1}{2}\right)^k \right| &= \\ &= \left| n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \left[\ln \left(1 - \frac{k}{n}\right) + \frac{k}{n} \right] \right| \\ &\leq n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left| \ln \left(1 - \frac{k}{n}\right) + \frac{k}{n} \right| \\ &\leq n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{k^2}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \frac{A}{n} \end{aligned}$$

Ainsi avec le théorème de la distance, on a $n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln \left(1 - \frac{k}{n}\right) + S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

On a donc : $n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln \left(1 - \frac{k}{n}\right) + S_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(1)$

Conclusion $n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln \left(1 - \frac{k}{n}\right) = -S_n + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{-2}{9} = \frac{2}{9}$

(d) Soient (a_n) et (b_n) deux suites qui ne s'annulent pas, qui converge vers 0 et avec $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n$

Montrer que : $e^{a_n} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n$

$$\begin{aligned} \text{On a } e^{a_n} - 1 &\underset{n \rightarrow \infty}{=} e^{b_n[1+o(1)]} - 1 \\ &= e^{b_n+o(b_n)} - 1 = (1 + \square + o(\square)) - 1 \\ &= b_n + o(b_n) + o(b_n) = b_n + o(b_n) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n \end{aligned}$$

En déduire un équivalent de $u_n - n^{2/3}$

On a montré que $\ln \left(\frac{u_n}{n^{2/3}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln \left(1 - \frac{k}{n}\right) - \frac{2 \ln(n)}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

et on vient de montrer que $n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln \left(1 - \frac{k}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{2}{9} + o(1)$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln \left(1 - \frac{k}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{2}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

On a donc $\ln \left(\frac{u_n}{n^{2/3}}\right) = \frac{2}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{9n}$

On applique l'équivalent ci dessus on a $e^{\ln \left(\frac{u_n}{n^{2/3}}\right)} - 1 = \frac{u_n}{n^{2/3}} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{2}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Conclusion : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} n^{2/3} + \frac{2}{9 \cdot n^{1/3}} + o\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)$

4. Compléments

(a) En étudiant la fonction $h : x \mapsto 4x^2 \ln(n) + \ln(1 - x) + x$, montrer l'inégalité admise.

(b) Démontrer, sans récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \ln(n - k)$

Indication : La suite $a_n = \ln(u_n)$, vérifie une relation de récurrence de type arithmético-géo et de solution homogène $H_n = \lambda \left(\frac{-1}{2}\right)^n$.

Suivant l'idée de la méthode de variation de la constante,

on cherche le solution de la relation de récurrence de la forme $a_n = c_n \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$