

Exercice 1. [Correction]**Partie A. Étude de la fonction f**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall t \neq 0, f(t) = \frac{\arctan(t)}{t}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ (en particulier en $x = 0$)
2. Vérifier que la fonction f est paire.

On va donc étudier la fonction f sur $\mathbb{R}_+$

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $f'(t)$, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.
4. Vérifier que f' admet une limite quand $x \rightarrow 0$.
5. Déterminer une primitive de $\frac{w}{(1+w^2)^2}$

En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$.

6. Justifier proprement que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Partie B. Étude de la fonction ϕ

Soit ϕ la fonction définie par $\phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

1. Déterminer $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition, de la fonction ϕ
2. Montrer, avec un DL, que la fonction ϕ se prolonge par continuité en 0 avec $\phi(0) = 1$.
3. Montrer que la fonction ϕ est paire.

Remarque : On doit montrer que pour tout/chaque $x \in \mathbb{R}$, $\phi(-x) = \phi(x)$, CàD intégrale = intégrale

On va donc étudier la fonction ϕ sur $\mathbb{R}_+$

4. Variation de la fonction ϕ
 - (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq \phi(x) \leq 1$.
Indication/Rappel/Remarque : On remarque que $\phi(x)$ est une intégrale et on se souvient de Q1f.
 - (b) Justifier que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \phi'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - \phi(x))$.
Donner les variations de ϕ sur $\mathbb{R}_+^*$

5. Limite en $+\infty$

(a) À l'aide d'un encadrement simple de $f(t) = \frac{\arctan(t)}{t}$, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$.

(b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$.

Partie C. Étude d'une suite récurrente

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = \phi(u_n)$, où ϕ est la fonction section ci-dessus.

1. Montrer que, pour tout x strictement positif : $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{x} (1 - f(x)) = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$.
2. Montrer que : $\forall t \geq 0, 0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.

En déduire que, pour tout x strictement positif : $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

3. Montrer que l'équation : $x \in \mathbb{R}, \phi(x) = x$ admet une unique solution. On note α cette solution.
Montrer que $\alpha \in]0; 1]$.
4. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.
5. En déduire que (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

———— Pour aller plus loin ! ————

Exercice 2. [Correction] Soit f et g deux fonctions définies, continues de $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

On va montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$

On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in [0, 1], f(x) = x\}$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ est non vide.
puis en déduire que $a = \inf(\mathcal{A})$ et $b = \sup(\mathcal{A})$ existent.
2. En utilisant que $a = \inf(\mathcal{A})$ est adhérent à $\mathcal{A}$, montrer que $a \in \mathcal{A}$, CàD que $a \in [0, 1]$ et $f(a) = g(a)$
On montrera de même que $b \in \mathcal{A}$. On l'admettra
3. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par g .
4. En appliquant le TVI, sur $[a, b]$, montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 3. [Correction] Soit f et g deux fonctions définies, continues de $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

On va montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$

On fait un RA, je suppose que $\forall x \in [0, 1], f(x) \neq g(x)$.

1. Montrer que : $[\forall x \in [0, 1], f(x) < g(x)]$ OU $[\forall x \in [0, 1], f(x) > g(x)]$

Remarque : Il est délicat de démontrer directement un "OU". Je vous conseille un RA

On suppose pour la suite que $\forall x \in [0, 1], f(x) > g(x)$

2. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1], f(x) \geq g(x) + M$
3. Montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], [f \circ \dots \circ f](x) \geq [g \circ \dots \circ g](x) + nM.$$

4. En déduire une absurdité. Conclure.

Exercice 4. [Correction] Soit f et g deux fonctions définies, continues de $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

On va montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$

On fait un RA, je suppose que $\forall x \in [0, 1], f(x) \neq g(x)$.

1. Montrer que : $[\forall x \in [0, 1], f(x) < g(x)]$ OU $[\forall x \in [0, 1], f(x) > g(x)]$

Remarque : Il est délicat de démontrer directement un "OU". Je vous conseille un RA

On suppose pour la suite que $\forall x \in [0, 1], f(x) > g(x)$

2. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que $f(a) = a$
3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$
 - (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
 - (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = u_n$
 - (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puis qu'elle converge vers une limite noté ℓ .
 - (d) En déduire une absurdité. Conclure.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

Partie A. Étude de la fonction f

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall t \neq 0, f(t) = \frac{\arctan(t)}{t}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ (en particulier en $x = 0$)

la fonction f est fabriquée avec des fonctions usuelles et les opérations classiques

Donc elle est continue (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^*$

$$\text{Pour } x \neq 0, \text{ on a } f(t) = \frac{\arctan(t)}{t}$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)}{t} = 1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \quad \text{et } f(0) = 1$$

Donc la fonction f est bien continue en 0

Conclusion : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

2. Vérifier que la fonction f est paire

Pour tout/chaque x , on a

$$f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{-x} = \frac{-\arctan(x)}{-x} = \frac{\arctan(x)}{x} = f(x)$$

Conclusion : la fonction f est paire

Pour être vraiment rigoureux, on devrait faire 2 calculs : quand $x \neq 0$ et pour $x = 0$

On va donc étudier la fonction f sur $\mathbb{R}_+$

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $f'(t)$, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est fabriquée avec des fonctions usuelles et les opérations classiques

Donc elle est dérivable (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^*$

$$\text{Et } \forall t \neq 0, f'(t) = \frac{\frac{1}{1+t^2}t - \arctan(t)}{t^2} = \frac{t - (1+t^2)\arctan(t)}{(1+t^2)t^2}$$

4. Vérifier que f' admet une limite quand $x \rightarrow 0$.

$$\text{Pour } t \neq 0, \text{ on a } f'(t) = \frac{t - (1+t^2)\arctan(t)}{(1+t^2)t^2}$$

$$\text{De plus } t - (1+t^2)\arctan(t) = t - (1+t^2) \left[t - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \right]$$

$$= \dots\dots\dots + o(t^3)$$

$$= 0.t + t^3 \left[-1 + \frac{1}{3} \right] + o(t^3)$$

$$\text{Conclusion : } f'(t) = \frac{\frac{-2}{3}t^3[1 + o(1)]}{1[1 + o(1)]t^2} = \frac{-2}{3}t[1 + o(1)] \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

5. Déterminer une primitive de $\frac{w}{(1+w^2)^2}$

$$\text{On a } \frac{w}{(1+w^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{\square'}{\square^2} \rightsquigarrow \frac{1}{2} \frac{1-1}{\square} = \frac{1}{2} \frac{-1}{1+w^2}$$

$$\text{En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que : } \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw = -\frac{1}{2} t^2 f'(t).$$

Pour tout/chaque $t > 0$.

On fait une IPP avec

$$u' = \frac{w}{(1+w^2)^2} \rightsquigarrow u = \frac{1}{2} \frac{-1}{1+w^2}$$

$$v = w \rightsquigarrow v' = 1$$

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw &= \left[\frac{1}{2} \frac{-1}{1+w^2} \cdot w \right]_0^t - \int_0^t \frac{1}{2} \frac{-1}{1+w^2} dw \\ &= \frac{-1}{2} \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \left[\arctan(w) \right]_0^t \\ &= \frac{-1}{2} \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \arctan(t)\end{aligned}$$

$$\text{De plus } -\frac{1}{2} t^2 f'(t) = -\frac{1}{2} t^2 \left[\frac{t - (1+t^2) \arctan(t)}{(1+t^2)t^2} \right] = \frac{-1}{2} \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \arctan(t)$$

$$\text{Conclusion : } \forall t \in \mathbb{R}_+, \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

6. Justifier proprement que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{On vient de voir que } f'(t) \text{ est du signe de } \ominus \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw$$

De plus $\frac{w^2}{(1+w^2)^2}$ est toujours ≥ 0 et pour $t > 0$ les bornes sont croissantes

$$\text{donc } \forall t > 0, \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw \geq 0$$

$$\text{Conclusion : } \forall t > 0, f'(t) \leq 0$$

et avec un bô tableau on a la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{Remarque : pour } t < 0 \text{ les bornes sont dé-croissantes donc } \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw \leq 0$$

Partie B. Étude de la fonction ϕ

Soit ϕ la fonction définie par $\phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

1. Déterminer $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition, de la fonction ϕ

À la question A1, on a justifié que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

$$\text{donc pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ le nombre } \int_0^x f(t) dt$$

Conclusion : la fonction ϕ est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$

2. Montrer, avec un DL, que la fonction ϕ se prolonge par continuité en 0 avec $\phi(0) = 1$.

On note $\mathcal{H}$ une primitive de f

$$\text{On a vu que } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) \text{ et on sait que } f \text{ est continue}$$

Donc avec le thm de primitivation des DL, on a

$$\mathcal{H}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{H}(0) + x - \frac{x^3}{9} + o(x^3)$$

$$\text{Ainsi on a } \phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

$$= \frac{1}{x} [\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}(0)]$$

$$= \frac{1}{x} \left[\left(\mathcal{H}(0) + x - \frac{x^3}{9} + o(x^3) \right) - \mathcal{H}(0) \right]$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{9} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{9} + o(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Conclusion : la fonction ϕ se prolonge par continuité en 0 avec $\phi(0) = 1$

3. Montrer que la fonction ϕ est paire.

$$\text{Pour tout } x, \text{ on doit montrer que : } \frac{1}{-x} \int_0^{-x} f(t) dt = \dots = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

On fait le changement de variable $u = ..$ dans l'intégrale

On va donc étudier la fonction ϕ sur $\mathbb{R}_+$

4. Variation de la fonction ϕ

(a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq \phi(x) \leq 1$.

Pour tout/chaque $x > 0$. On va encadrer l'intégrale

$> \forall t \in [0, x]$,

Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $f(x) \leq f(t) \leq \underbrace{f(0)}_{=1}$

$>$ on intègre l'inégalité de $t = 0$ à $t = x$

$$\text{Ainsi on a } \underbrace{\int_0^x f(x) dt}_{=x \cdot f(x)} \leq \int_0^x f(t) dt \leq \underbrace{\int_0^x 1 dt}_{=x}$$

Conclusion : On divise par $x > 0$, ainsi on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq \phi(x) \leq 1$.

(b) Justifier que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \phi'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - \phi(x))$.

Comme la fonction f est continue on sait que la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est dérivable

Donc la fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0, \phi'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}(0)}{x} \right] \\ &= \frac{f(x) \cdot x - (\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}(0)) \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{f(x) \cdot x}{x^2} - \frac{(\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}(0)) \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{f(x)}{x} - \frac{\phi(x)}{x} = \frac{1}{x} (f(x) - \phi(x)) \end{aligned}$$

Donner les variations de ϕ sur $\mathbb{R}_+$

Avec l'inégalité précédente, on a : $\forall t > 0, \phi'(t) \leq 0$

et avec un bô tableau on a : la fonction ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

5. Limite en $+\infty$

(a) À l'aide d'un encadrement simple de $f(t) = \frac{\arctan(t)}{t}$, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$.

Pour tout/chaque $x > 0$. On a

$> \forall t \in [0, x]$,

$$0 \leq \frac{\arctan(t)}{t} \leq \frac{\pi/2}{t}$$

$>$ on intègre l'inégalité de $t = 0$ à $t = x$

$$\text{Ainsi on a } 0 \leq \int_0^x f(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \ln(x)$$

$$\text{Ainsi } \forall x > 0, 0 \leq \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \frac{\ln(x)}{x}$$

Grâce au thm des 2 gendarmes et à la croissance comparée,

$$\text{on peut conclure : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$$

(b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$.

$$\text{On a } \phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

$$= \frac{1}{x} \left[\int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \right]$$

$$= \frac{\text{Konstante}}{x} + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 + 0 = 0$$

Partie C. Étude d'une suite récurrente

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = \phi(u_n)$, où ϕ est la fonction section ci-dessus.

1. Montrer que, pour tout x strictement positif : $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{x} (1 - f(x)) = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$.

Pour tout $x > 0$, on sait que $\phi'(x) < 0$, ainsi $|\phi'(x)| = -\phi'(x) = \frac{1}{x} (\phi(x) - f(x))$

De plus ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\phi(0) = 1$,

$$\text{donc } \forall x > 0, |\phi'(x)| = \frac{1}{x} (\phi(x) - f(x)) \leq \frac{1}{x} (1 - f(x))$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin } \frac{1}{x} (1 - f(x)) &= \frac{1}{x} (1 - f(x)) \\ &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} \arctan(x)\right) \\ &= \frac{1}{x^2} (x - \arctan(x)) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt\right) \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ou bien } \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt &= \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{x^2} \left[\int_0^x 1 dt - \int_0^x \frac{-1}{1+t^2} dt \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[x - \arctan(x) \right] = \frac{1}{x} (1 - f(x)) \end{aligned}$$

2. Montrer que : $\forall t \geq 0, 0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.

$$\text{Pour tout/chaque } t \geq 0, G - p = \frac{1}{2} - \frac{t}{1+t^2} = \dots$$

En déduire que, pour tout x strictement positif : $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout/chaque } x > 0, \text{ on a } |\phi'(x)| &\leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &\leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \underbrace{t \frac{t}{1+t^2}}_{\leq 1/2} dt \\ &\leq \frac{1}{2x^2} \int_0^x t dt \\ &\leq \frac{1}{2x^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \\ &\leq \frac{1}{2x^2} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3. Montrer que l'équation : $x \in \mathbb{R}, \phi(x) = x$ admet une unique solution. On note α cette solution. Montrer que $\alpha \in]0; 1]$.

On utilise la thm de la bijection monotone avec $h : x \mapsto \phi(x) - x$

et $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$, on a $\frac{-1}{4} \leq \phi'(x) \leq \frac{1}{4}$, donc $h' < 0$

4. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.

C'est le TAF

5. En déduire que (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

À la mode Géo, on a $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha|$

Donc avec le thm de la distance, on a la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) On considère $\mathcal{A} = \{x \in [0, 1], f(x) = x\}$.

1. Montrons que $\mathcal{A}$ que est non vide.

On cherche un point x_0 au départ vérifiant $f(x_0) - x_0 = 0$.

On applique le TVI à la fonction $h : x \rightarrow f(x) - x$ sur le segment $[0, 1]$.

De plus $\mathcal{A}$ est majorée et minorée car $\mathcal{A} \subset [0, 1]$ et non vide

Conclusion : $a = \inf(\mathcal{A})$ et $b = \sup(\mathcal{A})$ existent.

2. Montrons que $a \in \mathcal{A}$.

Comme $a = \inf(\mathcal{A})$, il existe une suite (a_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ et $a_n \in \mathcal{A}$.

$$\left. \begin{array}{l} a_n \in \mathcal{A}, \text{ donc } f(a_n) = a_n \\ a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \\ f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a) \end{array} \right\} \text{ car } f \text{ est } \mathcal{C}^0 \implies \text{à la limite } f(a) = a.$$

De même on montre que $b \in \mathcal{A}$

3. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par g .

On veut montrer que : $\forall x \in \mathcal{A}, g(x) \in \mathcal{A}$, CàD $f(g(x)) = g(x)$

On suppose que x_0 est fixé dans $\mathcal{A}$.

On a $f(g(x_0)) = [f \circ g](x_0) = [g \circ f](x_0) = g(f(x_0)) = g(x_0)$.

Donc $g(x_0) \in \mathcal{A}$

4. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

On applique le thm des V.I. à la fonction $h : x \rightarrow f(x) - g(x)$ sur le segment $[a, b]$

$> h$ est C^0 sur $[a, b]$

$> h(a) = f(a) - g(a) = a - g(a) \leq 0$ car a minore $\mathcal{A}$ et $g(a) \in g(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.

$> h(b) = f(b) - g(b) = b - g(b) \geq 0$ car b majore $\mathcal{A}$ et $g(b) \in g(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.

Conclusion : $\exists \alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) - g(\alpha) = 0$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Montrer que : $[\forall x \in [0, 1], f(x) < g(x)]$ OU $[\forall x \in [0, 1], f(x) > g(x)]$

On fait un RA. On suppose que

$$[\exists u \in [0, 1], f(u) \leq g(u)] \quad \text{ET} \quad [\exists v \in [0, 1], f(v) \geq g(v)].$$

On applique le TVI à la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ sur $[u, v]$

Ainsi il existe $w \in [u, v] \subset [0, 1]$ tel que $h(w) = 0 \iff f(w) = g(w)$ OUPS

2. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1], f(x) \geq g(x) + M$

La fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ est continue sur le segment $[a, b]$ donc bornée et atteint ses bornes, ainsi

$$\text{il existe } M \text{ tel que } \forall t \in [a, b], \phi(t) = f(t) - g(t) \geq M$$

De plus M est atteint, CàD il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $M = h(\alpha)$

Donc d'après Q1, $M = h(\alpha) > 0$

3. Montrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], [f \circ \dots \circ f](x) \geq [g \circ \dots \circ g](x) + nM$.

On montre par récurrence que

$$H \langle n \rangle : \forall x \in [0, 1], f^n(x) \geq g^n(x) + nM$$

Initialisation. $H \langle 1 \rangle$ est vraie. C'est la question précédente.

Hérédité. On suppose $H_{<n>}$.

On va cheminer

$$f^{n+1}(x) = f^n(f(x))$$

On applique $H \langle n \rangle$ car $f(x) \in [0, 1]$

$$\geq g^n(f(x)) + nM$$

Comme $f \circ g = g \circ f$, on a $f \circ g^n = g^n \circ f$

$$\geq f(g^n(x)) + nM$$

On applique $H \langle 1 \rangle$ car $g^n(x) \in [0, 1]$

$$\geq g(g^n(x)) + M + nM$$

Donc $H \langle n+1 \rangle$ est vraie.

4. En déduire une absurdité. Conclure.

On a $\forall n, nM \leq f^n(x) - g^n(x) \leq 1 - 0$

quand $n \rightarrow +\infty$ c'est absurde.

Conclusion : Ainsi $[\forall x \in [0, 1], f(x) \neq g(x)]$ est faux, donc

$$\exists x_0 \in [0, 1], f(x_0) = g(x_0).$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Montrer que : $[\forall x \in [0, 1], f(x) < g(x)]$ OU $[\forall x \in [0, 1], f(x) > g(x)]$

On fait un RA. On suppose que

$$[\exists u \in [0, 1], f(u) \leq g(u)] \quad \text{ET} \quad [\exists v \in [0, 1], f(v) \geq g(v)].$$

On applique le TVI à la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ sur $[u, v]$

Ainsi il existe $w \in [u, v] \subset [0, 1]$ tel que $h(w) = 0 \iff f(w) = g(w)$ OUPS

On suppose pour la suite que $\forall x \in [0, 1], f(x) > g(x)$

2. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que $f(a) = a$

On considère la fonction $h : x \mapsto f(x) - x$

> la fonction h est continue sur $[0, 1]$

> $h(0) = f(0) \geq 0$ car f est à valeurs dans $[0, 1]$

> $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car f est à valeurs dans $[0, 1]$

D'après le TVI, il existe $a \in [0, 1]$ tq $h(a) = 0 \iff f(a) = a$

3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$

- (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

On fait par récurrence $H_{<n>}$: le nombre u_n se calcule et $u_n \in [0, 1]$

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = u_n$

On fait par récurrence $H_{<n>} : f(u_n) = u_n$

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puis qu'elle converge vers une limite noté ℓ .

Pour tout/chaque n , on a $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - f(u_n) < 0$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

De plus la suite est minorée par 0 (Voir Q3a) donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in [0, 1]$

(d) En déduire une absurdité. Conclure.

Les fonctions f et g sont continues ET $\forall n, u_n = f(u_n)$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ ET que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$

Donc à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on a $\ell = f(\ell)$ et $\ell = g(\ell)$

Conclusion : $f(\ell) = g(\ell)$ OUPS!!!!

Ainsi $[\forall x \in [0, 1], f(x) \neq g(x)]$ est faux, donc

$\exists x_0 \in [0, 1], f(x_0) = g(x_0)$.