

Dérivabilité, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$			
1 Dérivable et $\mathcal{C}^1$.	1	2 Dérivée d'ordre supérieur. 6	
1.1 Définitions.	1	2.1 Définition.	6
1.2 Dérivable et DL	2	2.2 Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$	6
1.3 Formulaire classiques.	3	2.3 $\mathcal{C}^\infty$ et équation différentielle.	8
1.4 Bijection Réciproque.	4	2.4 Le Théorème de prolongement $\mathcal{C}^n$	8
1.5 Le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$	5	3 Exercices.	9

Dans ce chapitre les ensembles $\mathcal{D}$ de définition seront des intervalles ou des réunions finies ou infinies d'intervalles, par exemples :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}, \mathcal{D} = \mathbb{R}^*, \mathcal{D} =]0, 1[\cup]1, \infty[\text{ ou } \mathcal{D}_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} - k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[.$$

1 Dérivable et $\mathcal{C}^1$.

1.1 Définitions.

Définition 1. Taux de variation, dérivée.
Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $a \in \mathcal{D}$.

> La fonction taux de variation entre a et x , noté $T_{aux_a}(x)$,
C'est la pente de la corde entre les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$,
$$\text{On a donc } \forall x \in \mathcal{D} \text{ et } x \neq a, T_{aux_a}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

> On dit que f est dérivable en a
Ssi le taux de variation en a admet une limite finie quand $x \rightarrow a$.
$$\text{On a donc } f'(a) = \lim_{\substack{def \\ x \rightarrow a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

*Cette limite est appelé le nombre dérivée en a et on le note $f'(a)$.
On définit de même les notions de dérivée à droite $f'_d(a)$ et à gauche $f'_g(a)$.*

> On dit que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$
Ssi f est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$.
La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelé la dérivée de f .

> Lorsque la fonction f est dérivable et que la fonction f' est continue,
On dit que la fonction f est continument dérivable, notée $\mathcal{C}^1$.

Interprétation physicienne de $f'(t)$.

Si $f(t)$ désigne l'abscisse d'un point mobile sur un axe (ou même dans le plan) en fonction du temps t ,
Alors $f'(t)$ est la vitesse instantanée du point à l'instant t .

Théorème 2.
Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$.
On suppose que f est définie à gauche et à droite de a .

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche et à droite} \\ ET \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Définition 3. Interprétation géométrique

Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$.

> Lorsque f est dérivable en a .

La fonction f admet une tangente en a d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

> Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm \infty$, alors la fonction f n'est pas dérivable en a .

Cependant la fonction f admet une tangente verticale en a .

> Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ n'existe pas, CàD "Chaotique", alors la fonction f n'est pas dérivable en a .

Et la fonction n'a pas de tangente en $(a, f(a))$.

1.2 Dérivable et DL**Théorème 4. Continue, Dérivable et DL**

Soit f une fonction définie de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathcal{D}$ ainsi le nombre $f(a)$ se calcule.

> Continue et DL

la fonction f est continue en a Ssi $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$

$$\text{Ssi } f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$$

$$\text{Ssi } f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + o(1)$$

> Dérivable et DL

la fonction f est dérivable en a Ssi $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)$

$$\text{Ssi } f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + f'(a)h + o(h) \quad (\text{Taylor-Young version dérivable})$$

Application : Dérivable $\implies$ continue

Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$.

Si f est dérivable en a alors f est continue en a .

Attention : la réciproque est fausse,

la fonction valeur absolue est continue en 0 mais non-dérivable en 0.

Démonstration : Pour tout $a \in \mathcal{D}$. On suppose que f est dérivable en a , donc d'après Taylor-Young version dérivable,

$$\text{on a } f(x) = f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + f'(a)h + o(h)$$

$$\text{ainsi on a } f(x) = f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + f'(a)h + o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a) + 0 + 0 = f(a). \text{ Donc } f \text{ est continue en } a.$$

1.3 Formulaire classiques.

Théorème 5. CL, Produit, Quotient

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a \in \mathcal{D}$.

On suppose que f et g sont dérivables en a

On a alors

> **Combinaison Linéaire.** Pour tout λ, μ , la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et

$$[\lambda f + \mu g]'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

> **Produit.** La fonction fg est dérivable en a et de plus

$$[fg]'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

> **Quotient.** Si $g(a) \neq 0$, la fonction f/g est dérivable en a et de plus

$$\left[\frac{f}{g} \right]'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Démonstration : On va calculer la limite du taux.

> **Combinaison Linéaire.** On étudie le $T_{aux,a}(x)$ pour la fonction $\lambda f + \mu g$

$$T_{aux,a}(x) = \frac{[\lambda f + \mu g](x) - [\lambda f + \mu g](a)}{x - a} = \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \mu \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \underbrace{\lambda f'(a) + \mu g'(a)}_{\text{C'est } [\lambda f + \mu g]'(a)}$$

Donc la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et on a bien la formule.

> **Produit.** On étudie le $T_{aux,a}(x)$ pour la fonction fg

$$\begin{aligned} T_{aux,a}(x) &= \frac{[fg](x) - [fg](a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underbrace{\frac{g(x) + f(x)}{x - a}}_{\substack{\rightarrow f'(a) \quad \rightarrow g(a) \\ \rightarrow f(a) \quad \rightarrow g'(a)}} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a} \underbrace{f'(a)g(a) + f(a)g'(a)}_{\text{C'est } [fg]'(a)} \end{aligned}$$

la fonction fg est dérivable en a et on a bien la formule.

> **Quotient simple.** Si $g(a) \neq 0$,

alors la fonction $1/g$ est dérivable en a et de plus $\left[1/g \right]'(a) = -g'(a)/g^2(a)$

On étudie le $T_{aux,a}(x)$ pour la fonction $1/g$

$$T_{aux,a}(x) = \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} = \frac{-1}{g(x)g(a)} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{-1}{g^2(a)} \cdot g'(a)$$

Donc la fonction $1/g$ est dérivable en a et on a la formule.

> **Quotient complet.**

On écrit que $f/g = f \cdot (1/g)$ et on utilise la formule du produit puis on réduit au même dénominateur.

Fini $\square$

Théorème 6. Composée

Soit $f: \mathcal{D}_f \rightarrow \mathcal{A}_f$ et $g: \mathcal{D}_g \rightarrow \mathcal{A}_g$ deux fonctions et $a \in \mathcal{D}_f$ avec $b = f(a)$.

On suppose que $\mathcal{A}_f \subset \mathcal{D}_g$ ainsi la composée $g \circ f$ existe

On suppose que f est dérivable en a et que g est dérivable en $b = f(a)$

Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a

$$\text{et de plus } [g \circ f]'(a) = f'(a) \cdot g'(b) = f'(a) \cdot g'(f(a))$$

Démonstration : La démonstration avec le taux paraît simple mais il est délicat de justifier qu'insidieusement, on ne divise pas 0.

Mais on va quand même étudier le $\text{Taux}_a(x)$ pour la fonction $g \circ f$

$$\begin{aligned} \text{Taux}_a(x) &= \frac{[g \circ f](x) - [g \circ f](a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &\text{Je note } \square = f(x). \\ &\text{Comme } f \text{ est continue, } \square = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) = b \\ &= \frac{g(\square) - g(b)}{\square - b} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{g'(b)f'(a)}{\text{C'est } [g \circ f]'(a)} \end{aligned}$$

Donc la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et on a la formule.

Fini $\square$

Les observateurs attentifs noteront que l'on a divisé par $f(x) - f(a)$ et que rien n'assure que qu'on ne divise pas par 0. Pour surmonter cette difficulté, on peut discuter selon que $f'(a) = 0$ ou $\neq 0$, utiliser les DL ou recopier Bourbaki.

Théorème 7. Dérivabilité des fonctions classiques

On sait que les fonctions classiques sont dérivables sur leur ensemble $\mathcal{D}$ de définition, (sauf $[\sqrt{x}]$, arcsin et arccos), ainsi on déduit des théorèmes précédents que

Lorsque une fonction est fabriquée à l'aide des fonctions usuelles et des opérations classiques

Alors la fonction est dérivable sur $\mathcal{D}$, ainsi $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.

1.4 Bijection Réciproque.**Théorème 8. Bijection réciproque**

Soit I un intervalle et f une fonction bijective, dérivable de I sur J .

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ réalise une bijection } I \text{ sur } J \\ f \text{ est dérivable sur } I \\ \forall t \in I, f'(t) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f^{-1} \text{ la bijection réciproque est dérivable sur } J.$$

De plus on sait calculer $[f^{-1}]'$.

Plus précisément : Soit $a \in I$ et $f(a) = b \iff a = f^{-1}(b)$

> Si $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} la bijection réciproque est dérivable en $b = f(a)$ et de plus

$$[f^{-1}]'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

> Si $f'(a) = 0$ alors f^{-1} la bijection réciproque n'est pas dérivable en $b = f(a)$.

Par contre la fonction f^{-1} admet une tangente verticale en $(b, f^{-1}(b))$.

Démonstration : On suppose que $f'(a) \neq 0$. On étudie le $\text{Taux}_b(y)$ pour la fonction f^{-1}

$$\begin{aligned} \text{Taux}_b(y) &= \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))} \\ &\text{Je note } \square = f^{-1}(y). \\ &\text{Comme } f^{-1} \text{ est continue, } \square = f^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} f^{-1}(b) = a \\ &= \frac{\square - a}{f(\square) - f(a)} \xrightarrow{y \rightarrow b} \frac{1}{f'(a)} \end{aligned}$$

Si $f'(a) = 0$, alors le même calcul donne $\text{Taux}_b(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \infty$ donc la fonction n'est pas dérivable et la droite tangente est verticale.

Fini $\square$

1.5 Le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$.

non, Non, NON : $\mathcal{D}'$ n'est pas l'ensemble de définition de f' .

Théorème 9.

Le nombre $f'(t)$ se calcule avec le formulaire, **lorsque ce nombre existe.**
Il y a donc 2 situations.

> Situation générale.

Lorsque la fonction f est fabriquée avec les fonctions usuelles et les opérations classiques

Alors je connais l'ensemble $\mathcal{D}'$

et, sur $\mathcal{D}'$, on peut utiliser le formulaire pour calculer $f'(t)$.

> Situation exceptionnelle.

Lorsque le point a est un point exceptionnel

Alors on utilise le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.

Théorème 10. Théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$

Soit f une fonction définie sur $]a, b]$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ une fonction } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]a, b] \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = A' \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Alors la fonction f se prolonge en a
ET la prolongement est $\mathcal{C}^1$ en a et donc sur $[a, b]$.

$$\text{Ainsi On a } f(a) = A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ et } f'(a) = A' = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$$

Généralisation : Le théorème est encore vrai quand $A' = \pm\infty$.

La conclusion est alors :

la fonction f se prolonge en a avec $f(a) = A \in \mathbb{R}$

mais le prolongement n'est pas dérivable en a . car $f'(a) = \infty$ est interdit!!!

Cependant le graphe de f admet une tangente verticale en a .

Subtilité :

> On prolonge la fonction en a donc on choisit que $f(a) = A$ "pour que le graphe n'est plus de petit trou".

> Par contre, c'est le théorème qui impose que la fonction est dérivable,

CàD je ne choisis pas que $f'(a) = A'$, je suis obligé de l'avoir et cela m'arrange bien.

Pour démontrer le Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, il faut utiliser l'égalité des AF voir la fin du prochain chapitre.

Paradoxal mais vrai.

Il existe des fonction f définie en a , continue en a , dérivable en a mais qui ne sont pas $\mathcal{C}^1$ en a .

2 Dérivée d'ordre supérieur.

2.1 Définition.

Soit une fonction réelle f définie sur un intervalle I

> Par convention : $f^{(0)} = f$.

> Si f est dérivable sur cet intervalle I . La fonction dérivée f' est alors définie sur I . On peut alors étudier les propriétés de dérivabilité de f' , et, en cas de dérivabilité,

> On obtient la dérivée seconde f'' (dérivée de la dérivée). On peut continuer de la sorte tant que c'est possible.

Définition 11. Dérivée d'ordre supérieur

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que f est n -fois dérivable si on peut dériver f sur I , n fois de suite.

Cela définit la fonction $f^{(n)}$ que l'on nomme dérivée n -ième de f .

Plus précisément, il s'agit d'une définition par récurrence, fondée sur :

Si $f^{(n)}$ existe sur I et est dérivable alors on définit la dérivée $(n+1)$ -ième par

$$f^{(n+1)} = [f^{(n)}]'$$

Définition 12. Classe $\mathcal{C}^n, \mathcal{C}^\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

> Une fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I si elle est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue.

Ainsi $f \in \mathcal{C}^n$ alors les fonctions $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ existent et sont continues.

On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ de I à valeurs dans $\mathbb{R}$

> On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc si f est infiniment dérivable.

Ainsi $f \in \mathcal{C}^\infty$ alors les fonctions $f, f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots$ existent et sont continues.

On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I à valeurs dans $\mathbb{R}$

2.2 Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème 13.

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et I un intervalle.

Soit f une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On a équivalence.

$$f \text{ est } \mathcal{C}^{n+1} \iff \begin{pmatrix} f \text{ est } \mathcal{C}^n \\ \text{et} \\ f^{(n)} \text{ est } \mathcal{C}^1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} f \text{ est } \mathcal{C}^1 \\ \text{et} \\ f' \text{ est } \mathcal{C}^n \end{pmatrix}$$

De plus on a alors $f^{(n+1)} = [f^{(n)}]' = [f']^{(n)}$

Démonstration : C'est évident vu la définition par récurrence de $f^{(n)}$.

Théorème 14. Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et I un intervalle.

Soit f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On suppose que les fonctions f et g sont $\mathcal{C}^n$ sur I .

On a alors

- > **Combinaison Linéaire.** On suppose que les fonctions f et g sont $\mathcal{C}^n$ sur I ,
Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^n$ sur I et de plus

$$[\lambda f + \mu g]^{(n)} = \lambda [f]^{(n)} + \mu [g]^{(n)}$$

- > **Produit.** On suppose que les fonctions f et g sont $\mathcal{C}^n$ sur I ,
Alors la fonction $f g$ est $\mathcal{C}^n$ sur I et on a la formule de Leibniz

$$[f g]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [f]^{(k)} [g]^{(n-k)}$$

- > **Quotient.** On suppose que les fonctions f et g sont $\mathcal{C}^n$ sur I et que g ne s'annule pas sur I ,

Alors la fonction f/g est $\mathcal{C}^n$ sur I et par contre il n'y a pas de formule.

- > **Composée.** On suppose que les fonctions f et g sont composables, CàD que $\text{Im}(f) \subset \mathcal{D}_g$ et sont $\mathcal{C}^n$.

Alors la fonction $g \circ f$ est $\mathcal{C}^n$ sur I .

- > **Bijection réciproque.** On suppose que la fonction f réalise une bijection de $\mathcal{C}^n$ de I sur J et que f' ne s'annule pas sur I ,

Alors la bijection réciproque f^{-1} est bijective de classe $\mathcal{C}^n$ sur J .

Démonstration : Pour les CL. On va démontrer par récurrence

$H < n > : \text{Si } f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \text{ alors } \lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \text{ et la formule.}$

> $H < 0 > ?$ OK, une Combinaison Linéaire de fonction continue est continue.

> $H < n > \Rightarrow H < n+1 > ?$

On veut démontrer $H < n+1 >$, donc on suppose que $f, g \in \mathcal{C}^{n+1}$

On va montrer que : $h = \lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^{n+1}$ et la formule.

On va utiliser : $\left(\begin{array}{l} h \text{ est } \mathcal{C}^1 \\ \text{et} \\ h' \text{ est } \mathcal{C}^n \end{array} \right) \Rightarrow h \text{ est } \mathcal{C}^{n+1}.$

> On sait que $f, g \in \mathcal{C}^{n+1} \Rightarrow f, g \in \mathcal{C}^1$ et à cause de la théorie de la dérivabilité, on a alors : $h = \lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^1$

> A cause de la théorie de la dérivabilité, on sait qu'alors : $h' = \lambda f' + \mu g'$.

On a $f, g \in \mathcal{C}^{n+1} \Rightarrow f', g' \in \mathcal{C}^n$ et à cause de $H < n >$, on déduit que $h' = \lambda f' + \mu g' \in \mathcal{C}^n$.

Conclusion : $h = \lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^{n+1}$

Enfin la formule est simple :

$$[\lambda f + \mu g]^{(n+1)} = h^{(n+1)} = [h']^{(n)}$$

On dérive le CL

$$= [\lambda f' + \mu g']^{(n)}$$

$$\stackrel{H < n >}{=} \lambda [f']^{(n)} + \mu [g']^{(n)} = \lambda f^{(n+1)} + \mu g^{(n+1)}$$

Fini $\square$

Pour le produit et le quotient, on fait de même et la formule de Leibniz se démontre par récurrence de la même façon que pour les polynômes.

2.3 $\mathcal{C}^\infty$ et équation différentielle.

Théorème 15.

Soit f une fonction solution sur $\mathcal{D}$ de l'équation différentielle **normalisée**
par exemple : $1 y' + 2x \sin(y) = 0$

Alors la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.

Démonstration : Je fais la démonstration sur un exemple.

On suppose que la fonction f est une solution sur $\mathcal{D}$ de l'équation différentielle normalisée : $1 y' + 2x \sin(y) = 0$

On va montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$.

La démonstration est ressemblé beaucoup à celles des théorèmes qui précèdent.

On va démontrer par récurrence $H < n > : f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

> $H < 0 > ?$ Comme f est solution d'une équation différentielle, elle est dérivable et donc continue. Donc $H < 0 >$ est vraie.

> $H < n > \Rightarrow H < n+1 > ?$

On suppose que f est $\mathcal{C}^n$

On va montrer que : f est $\mathcal{C}^{n+1}$.

On va utiliser : $\left(\begin{array}{l} f \text{ est } \mathcal{C}^1 \\ \text{et} \\ f' \text{ est } \mathcal{C}^n \end{array} \right) \Rightarrow f \text{ est } \mathcal{C}^{n+1}$

> Comme f est $\mathcal{C}^n$, elle est $\mathcal{C}^1$.

> De plus, on sait que $f' = -2x \sin(f)$

$\left. \begin{array}{l} \text{la fonction } f \text{ est } \mathcal{C}^n \\ \text{Les fonctions } [x] \text{ et Sinus sont } \mathcal{C}^\infty \end{array} \right\} \Rightarrow f' = -2x \sin(f) \text{ est } \mathcal{C}^n.$

Conclusion : f est $\mathcal{C}^{n+1}$ et donc $H < n+1 >$ est vraie.

2.4 Le Théorème de prolongement $\mathcal{C}^n$.

Théorème 16. Théorème de prolongement $\mathcal{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ f une fonction définie sur $]a, b[$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ une fonction } \mathcal{C}^n \text{ sur }]a, b[\\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = A' \\ \lim_{x \rightarrow a} f''(x) = A'' \\ \vdots \\ \lim_{x \rightarrow a} f^{(k)}(x) = A^{(k)} \in \mathbb{R} \\ \vdots \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Alors la fonction f se prolonge en a
ET la prolongement est $\mathcal{C}^n$ en a donc sur $[a, b]$.

Ainsi on a $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, f^{(k)}(a) = A^{(k)} = \lim_{x \rightarrow a} f^{(k)}(x)$

Démonstration : On commence par appliquer le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ à la fonction f .

> Puis on applique le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ à la fonction f' ainsi f' est $\mathcal{C}^1$ et donc le prolongement est $\mathcal{C}^2$.

> Puis on applique le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ à la fonction f'' ainsi le prolongement est $\mathcal{C}^3$. Etc

3 Exercices.

_____ Dérivable et $\mathcal{C}^1$ _____

Exercice 1. Déterminer $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition et $\mathcal{D}'$ l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes

$$1. x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$$

$$2. x \mapsto \arcsin(2x + 1)$$

$$3. x \mapsto \arcsin(x^2)$$

$$4. x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles $\mathcal{C}^1$

$$f: x \mapsto \begin{cases} f(x) = (x-1)^2 & \text{Si } x > 1 \\ f(1) = 0 \\ f(x) = (x-1)^3 & \text{Si } x < 1 \end{cases} \quad g: x \mapsto \begin{cases} g(x) = x^2 + x & \text{Si } x \geq 1 \\ g(x) = 1 + ax + bx^3 & \text{Si } x < 1 \end{cases}$$

Exercice 3. Montrer que les fonctions

$$\left[h: x \mapsto \frac{\ln(1-2x) + 2x}{x^2} \right], \left[h: x \mapsto \frac{x}{e^x - 1} \right] \text{ ou } \left[h: x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)} \right]$$

se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ en 0.

_____ Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ _____

Exercice 4. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

1. Montrer que la fonction $h: x \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$

2. Justifier que la fonction F est C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

3. Donner un DL en 0 de h puis de $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ et de F .

En déduire que F continue en 0. (complément est-elle $\mathcal{C}^1$ en 0)

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sin(t)} dt$$

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer f'

2. Étude la fonction $h: x \mapsto \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$

(a) Montrer que la fonction h est $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

(b) Soit H une primitive de h .

Justifier que H existe et que $H(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} H(0) + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$

3. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(2)$

 $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$

Exercice 6.

1. Calculer les dérivées k-ième pour des expressions suivantes x^n , 2^x , $\frac{1}{x+1}$, xe^{2x} .
2. Calculer la dérivée n-ième pour de $\frac{e^{2x}}{x+1}$.
3. Décomposée en éléments simples puis calculer la dérivée n-ième pour de $\frac{1}{x^2+1}$.

Exercice 7.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left[e^{\sqrt{3}x} \sin(x)\right]^{(n)} = 2^n e^{\sqrt{3}x} \sin\left(x + n\frac{\pi}{6}\right)$.
3. Retrouver les deux résultats précédents avec les complexes.

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

- > Exprimer f' , f'' en fonction de H_1 et H_2 .
- > Généraliser en exprimant $f^{(n)}$ en fonction H_n .

Exercice 9. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$.

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$.
Montrer que pour tout n , il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)} = P_n(x) e^{x^2}$
2. Former une équation différentielle simple vérifiée par f .
En déduire une relation entre P_n , P_{n+1} et P_{n+2} .
3. En combinant les deux questions précédente,
trouver une équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par P_n .

Exercice 10. Montrer, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = (-1)^n x^{-n-1} e^{\frac{1}{x}}.$$

A noter : l'entier n intervient comme dérivée $n^{\text{ième}}$ et aussi dans la fonction qui est dérivée.

Théorème de prolongement $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^{n+1} & \text{Si } x \geq 0 \\ 0 & \text{Si } x < 0 \end{cases}$

Montrer que f est $\mathcal{C}^n$ mais pas $\mathcal{C}^{n+1}$.

Exercice 12. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{1/x^2}$.

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
Montrer que pour tout n , il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{1/x^2}$.
2. Montrer que la fonction f se prolonge en 0 et que le prolongement est $\mathcal{C}^\infty$.