

Rolle et copains.

1	Extremum et point critique.	1	3	Accroissements finis.	6
			3.1	L'égalité des Accroissements finis.	6
			3.2	L'inégalité des Accroissements Finis.	6
2	Théorèmes de Rolle.	3	4	Applications classiques.	8
2.1	Théorème de Rolle.	3	4.1	Le théorème $\mathcal{C}^1$	8
2.2	Rolle généralisé et Rolle itéré.	4	4.2	Liens entre Dérivabilité et monotonie.	8
2.3	Une application classique et plus difficile.	5	5	Exercices	9

1 Extremum et point critique.

Définition 1.

Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Point Critique.

On dit que a est un point critique de f Ssi

$$f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = 0.$$

Minimum global/local.

On dit que f admet un minimum global sur $\mathcal{D}$ en a

$$\text{Ssi sur } I, \text{ on a } f(x) \geq f(a) \iff f(x) - f(a) \geq 0$$

On dit que f admet un minimum local en a

$$\text{Ssi au voisinage de } a, f(x) \geq f(a) \iff f(x) - f(a) \geq 0$$

On définit de même un maximum global et local.

Extremum : Un extremum est un maximum ou un minimum.

Théorème 2. Lien entre extremum et point critique

Soit I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ est un extremum local de } f \\ f \text{ est dérivable en } a \\ a \text{ n'est pas une borne de } I \end{array} \right\} \implies f'(a) = 0$$

Attention : Toutes les hypothèses sont indispensables.

Démonstration : Les hypothèses assurent que

> Comme a n'est pas une borne I

$\implies$ donc les voisinages de a sont de la forme $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I$ avec $\varepsilon > 0$

> Comme a est un maximum local donc

$\implies$ Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon], f(x) \leq f(a)$

> Comme f est dérivable en a ,

$\implies$ on a $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ (d'après le théorème de Taylor-Young)

Pour la démonstration, je suppose que a est un maximum.

Il y a trois possibilités : Soit $f'(a) > 0$, Soit $f'(a) < 0$, Soit $f'(a) = 0$

> On va montrer que $f'(a) > 0$ est absurde

Pour la pédagogie, on va suppose en plus que $f(a) > 0$

On fait un dessin avec $f(a) > 0$ et $f'(a) > 0$.

On constate et on va démontrer : $\exists \eta > 0, \forall x \in]a, a + \eta], f(x) > f(a)$

On considère $Q(x) = \frac{f(x)}{f(a)}$

Comme f est continue, on a $Q(x) = \frac{f(x)}{f(a)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \frac{f(a)}{f(a)} = 1$

Ceci ne permet pas des conclure car l'objectif est de montrer $Q(x) \underset{Strict}{>} 1$

On fait un DL affin de justifier que $Q(x) = \frac{f(x)}{f(a)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} 1^+$

$$Q(x) = \frac{f(x)}{f(a)} = \frac{f(a+h)}{f(a)} \underset{x \rightarrow a}{=} \frac{f(a) + f'(a)h + o(h)}{f(a)} = 1 + \frac{f'(a)}{f(a)}h + o(h)$$

Comme $f(a) > 0$ et $f'(a) > 0$, on a $\frac{f'(a)}{f(a)}h$ donc $Q(x) = \frac{f(x)}{f(a)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} 1^+$

Conclusion : On a $\exists \eta > 0, \forall x \in]a, a + \eta], f(x) > f(a)$

Comme on a supposé que $f(x) \leq f(a)$ C'est OUPS!!!!

> On va montrer que $f'(a) < 0$ est absurde

Comme $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$,

$$\left. \begin{array}{l} f(a+h) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)h \\ f'(a)h > 0 \text{ en } a^- \end{array} \right\} \Rightarrow f(a+h) - f(a) > 0 \text{ Au voisinage de } a^-$$

Donc a n'est pas une maximum local. OUPS!!!!

Donc $f'(a) = 0$, c'est la seule possibilité non-absurde

Application classique

Attention, ce n'est pas un théorème donc qu'il faut refaire

Soient f et g deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$

$$\left. \begin{array}{l} f \leq g \text{ sur } I \\ f(x_0) = g(x_0) \\ x_0 \text{ n'est pas une borne de } I \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$$

Démonstration : La démonstration **fausse** à ne surtout pas écrire c'est :

Comme $f(x_0) = g(x_0)$ et que f est dérivable, on dérive l'égalité donc $f'(x_0) = g'(x_0)$

C'est faux car on dérive l'égalité, c'est $\frac{d}{dx} [f(x_0)] = \frac{d}{dx} [g(x_0)]$

et $\frac{d}{dx} [f(x_0)] = 0$!!!!

Pour justifier que $f'(x_0) = g'(x_0)$: il faut appliquer le théorème précédent à la fonction $h = g - f$ qui toujours positive et comme $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$ elle admet en x_0 un minimum (global) qui n'est pas une borne ainsi $h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) = 0$

2 Théorèmes de Rolle.

2.1 Théorème de Rolle.

Théorème 3. Le théorème de Rolle

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable en }]a, b[\\ f(b) = f(a) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Il existe } c \in]a, b[\text{ pas forcément unique} \\ \text{tel que } f'(c) = 0 \end{array}$$

Attention : Toutes les hypothèses sont indispensables.

Le théorème est faux pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Démonstration : Démonstration du théorème de Rolle.

la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ donc elle est Majorée/minorée et on a de plus

> Situation $f(a) = f(b) \neq M$. Comme M est atteint, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$.

On a maintenant

$$\left. \begin{array}{l} c \text{ est un maximum (global) de } f \\ f \text{ est dérivable en } c \in]a, b[\\ c \text{ n'est pas une borne de } [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow f'(c) = 0$$

> Situation $f(a) = f(b) \neq m$. On fait de même.

> Situation $f(a) = f(b) = m = M$. On a $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$

donc la fonction f est constante sur $[a, b]$ et donc $f' = 0$ sur $[a, b]$. ainsi $c = \frac{a+b}{2}$ convient.

Fini $\square$

Interprétation géométrique de Rolle dans $\mathbb{R}$

Le théorème provient du fait comme f est continue, elle admet forcément au moins un extremum global sur le segment $[a, b]$

donc en ce point la tangente est horizontale.

Ceci se conçoit aisément à l'aide d'un Bô dessin.

Interprétation physicienne de Rolle dans $\mathbb{R}$

On suppose que $f(t)$ désigne l'abscisse d'un point mobile sur la droite $\mathbb{R}$ en fonction du temps t .

> L'hypothèse $f(a) = f(b)$ veut signifier que :

le point mobile part d'un point donné au temps $t = a$ et revient à ce point au temps $t = b$.

> Le théorème de Rolle nous dit que

la vitesse de ce point mobile s'annule à un instant $t = c$ compris entre $t = a$ et $t = b$

Il est "évident" qu'au moment c où le point mobile fait demi-tour pour revenir à son départ, on a $f'(c) = 0$

Pourquoi Rolle est faux dans $\mathbb{C}$

On suppose que $f(t)$ désigne un point mobile dans le plan complexe $\mathbb{C}$ en fonction du temps t .

> L'hypothèse $f(a) = f(b)$ veut signifier que :

le point mobile part d'un point donné au temps $t = a$ et revient à ce point au temps $t = b$.

> Mais dans le plan, on n'est pas obligé de faire demi tour pour revenir au départ!

Comme on dit, on peut faire un tour.

2.2 Rolle généralisé et Rolle itéré.

Théorème 4. Théorème de Rolle généralisé

Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ f \text{ est dérivable en } \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Il existe } c \in \mathbb{R} \\ \text{tel que } f'(c) = 0 \end{array}$$

On peut remplacer $\mathbb{R}$ par $[0, +\infty[$, on doit alors supposer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$

Démonstration : Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème.

On va appliquer Rolle à la fonction h définie par $h(x) = f(\tan x)$

$$\text{On peut calculer } h(x) \text{ Ssi } \left\{ \begin{array}{l} \text{On peut calculer } \tan(x) \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\oplus k\pi \\ \tan(x) \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Donc f est bien définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

De plus on a

$$\left. \begin{array}{l} \tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2^-} +\infty \\ f(X) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \ell \end{array} \right\} \Rightarrow h(x) = f(\tan x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2^-} \ell$$

Donc h se prolonge en $\pi/2$ avec $h(\pi/2) = \ell$ et avec ce choix h est bien continue en $\pi/2$.

On prolonge de même h en $-\pi/2$ avec $f(-\pi/2) = \ell$.

La fonction h ainsi prolongée vérifie les hypothèses du théorème de Rolle

$$\text{ainsi il existe } a \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ tel que } h'(a) = 0$$

Enfin $h'(a) = \underbrace{(1 + \tan^2(a))}_{\neq 0} \cdot f'(\tan(a)) = 0$ donc $c = \tan(a) \in \mathbb{R}$ convient.

Théorème 5. Théorème de Rolle itéré

Soit $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ f \text{ est dérivable en } \mathbb{R} \\ f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Alors } f' \text{ s'annule au moins } (n-1) \text{ fois} \\ \text{CàD Il existe } b_1 < b_2 < \dots < b_{n-1} \\ \text{tel que } f'(b_1) = f'(b_2) = \dots = f'(b_{n-1}) = 0 \end{array}$$

De plus il y a entrelacement, CàD

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3 < \dots < a_{n-1} < b_n < a_n$$

Application très classique et très utile

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $I_{\text{intervalle}}$ et s'annule $(n+1)$ fois

alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois (ou plus) sur I .

Démonstration : Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème.

La fonction f vérifie sur chacun des intervalles $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n]$, les hypothèses du théorème de Rolle.

> On applique sur chacun de ces intervalles le théorème de Rolle, ainsi

$$\text{Pour tout } k \in \{1, \dots, n\}, \text{ il existe } b_k \in]a_{k-1}, a_k[\text{ tel que } f'(b_k) = 0$$

> L'entrelacement est évident car $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et $a_{k-1} < b_k < a_k$.

> L'application très classique et très utile se démontre en appliquant à f' le théorème de Rolle itéré ainsi f'' s'annule au moins $(n-2)$ fois puis on applique Rolle itéré à f'' etc

2.3 Une application classique et plus difficile.

Énoncé. Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

Montrer que : $\forall x \in [a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(x) = f''(c) \frac{(x-a)(x-b)}{2}$

Indication : On pourra utiliser la fonction h définie par $h(t) = f(t) - K \frac{(t-a)(t-b)}{2}$ où K est une constante à choisir

Réponse.

L'indication dit qu'il faut utiliser la même démarche que pour démontrer l'EAF.

De plus on doit montrer "il existe " avec du f'' et du = Donc c'est du Rolle itéré 2 fois

Idee : Un mélange entre EAF et Rolle itéré!!!

Situation $x = a$ ou $x = b$. Pour tout c , on a $0 = 0$ donc $c = \frac{a+b}{2}$ convient.

Situation $x \in]a, b[$.

On va utiliser le théorème de Rolle itéré appliquer à la fonction h définie par

$$h(t) = f(t) - K \frac{(t-a)(t-b)}{2}$$

> Je choisis K tel que $h(b) = h(a) = h(x)$.

On a $h(a) = h(b) = 0$ et $h(x) = f(x) - K \frac{(x-a)(x-b)}{2}$.

Comme $x \in]a, b[$, on a $(x-a)(x-b)/2 \neq 0$

$$\text{On trouve } K = \frac{f(x)}{\frac{(x-a)(x-b)}{2}}$$

> La fonction h vérifie les hypothèses de l'application du théorème de Rolle itéré

Ainsi il existe $c \in]a, b[$ tel que $h''(c) = 0$.

> Synthèse et conclusion :

D'une part : On calcule h'' ainsi $h''(c) = 0 \iff f''(c) = K$.

D'autre part : $K = \frac{f(x)}{\frac{(x-a)(x-b)}{2}}$

$$\text{Conclusion : } f(x) = f''(c) \frac{(x-a)(x-b)}{2}$$

Remarque : Le nombre c dépend de x , c'est clair surtout car f n'est pas un polynôme.
Donc on devrait noter c_x plutôt que c .

Fini $\square$

3 Accroissements finis.

3.1 L'égalité des Accroissements finis.

Théorème 6. L'égalité des Accroissements finis ou EAF ou TAF

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et f une fonction de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable en }]a, b[\end{array} \right\} \Rightarrow \text{Il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque : $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ peut s'écrire $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Démonstration : On va utiliser le théorème de Rolle appliqué à la fonction h définie par

$$h(x) = f(x) - f(a) - K(x - a) \quad \text{où } K \text{ est une constante à choisir}$$

> Je choisis K tel que $h(b) = h(a)$.

$$\text{Comme } h(a) = 0 \text{ et } h(b) = f(b) - f(a) - K(b - a), \text{ on trouve } K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

> La fonction h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle qui assure que : il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

$$\text{Comme } h'(x) = [f(x) - f(a) - K(x - a)]' = f'(x) - K, \text{ on a } h'(c) = f'(c) - K = 0$$

$$\text{Conclusion : } f'(c) = K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Fin $\square$

3.2 L'inégalité des Accroissements Finis.

Théorème 7. L'inégalité des Accroissements finis ou IAF ou TAF

Soit I un intervalle et f une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Version dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec les modules.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } I \\ \forall t \in I, |f'(t)| \leq k \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Alors la fonction } f \text{ est } k\text{-lipschitzienne} \\ \text{CàD } \forall x, x' \in I, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'| \end{array}$$

Version dans $\mathbb{R}$ sans valeur absolue.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } I \\ \forall t \in I, m \leq f'(t) \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow \forall x, x' \in I \text{ avec } x' \leq x, m(x - x') \leq f(x) - f(x') \leq M(x - x')$$

Interprétation physique d'inégalité des accroissements finis.

L'inégalité des accroissements finis nous dit que

Un point mobile dont la vitesse instantanée v est toujours comprise entre $v_{\min}$ et $v_{\max}$ entre deux instants t_0 et t_1 parcourt entre ces deux instants une distance comprise entre $v_{\min} \times (t_1 - t_0)$ et $v_{\max} \times (t_1 - t_0)$.

Démonstration : > Démonstration de la version sans les valeurs absolues dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \leq x' \in I$, on a

Comme f est dérivable sur l'intervalle I , elle est bien continue sur $[x, x']$ et dérivable $]x, x'[$ donc d'après l'égalité des accroissements finis,

$$\text{il existe } c \in]x, x'[\text{ tel que } f(x') - f(x) = f'(c)(x' - x)$$

On encadre $f'(c)$ avec m et M et on n'oublie pas que comme $x \leq x'$, on a bien $(x' - x) \geq 0$.

> Démonstration de la version avec les valeurs absolues dans $\mathbb{R}$.

C'est la même démonstration mais il est inutile de supposer que $x \leq x'$ car quand on a de l'égalité $f(x') - f(x) = f'(c)(x' - x)$, on met les Valeurs Absolues et on majore sans appréhension car $|x - x'|$ est forcément ≥ 0 .

> Démonstration de la version avec les modules dans $\mathbb{C}$.

La démonstration dans $\mathbb{C}$ est différente
car l'égalité des accroissements finis n'est pas valide dans $\mathbb{C}$.
La démonstration est difficile et n'est pas exigible, je la fais vite.

Pour tout $x, x' \in I$, on a

> Comme $f(x) - f(x')$ est un complexe, on peut écrire $f(x) - f(x') = r e^{i\theta}$ avec $r = |f(x) - f(x')|$.

Je considère, sur I , la fonction $h = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f)$ définie par
$$h(t) = [\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f)](t) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} . f(t))$$

> La fonction h est intéressante car on a

$$\begin{aligned} h(x) - h(x') &= \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(x)) - \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(x')) \\ &= \operatorname{Re}(e^{-i\theta} (f(x) - f(x'))) \\ &= \operatorname{Re}(e^{-i\theta} . r . e^{i\theta}) = \operatorname{Re}(r) = r = |f(x) - f(x')| \end{aligned}$$

ET la fonction h , étant une partie réelle, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et pas dans $\mathbb{C}$ donc h est une fonction numérique "classique".

On va appliquer l'IAF à la fonction h .

La suite utilise des propriétés des fonctions dérivables à valeurs complexes.

> La fonction h est dérivable sur I et $h' = [\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f)]' = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f')$. ainsi

$$\forall t \in I, \quad |h'(t)| = |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f')| \leq |e^{-i\theta} f'| \leq 1 . k = k$$

> Comme la fonction h est à valeurs dans $\mathbb{R}$,

on peut utiliser l'inégalité des accroissements finis, ainsi $|h(x) - h(x')| \leq k |x - x'|$

Or $|h(x) - h(x')| = |f(x) - f(x')|$ donc c'est fini!!!

Fini $\square$

4 Applications classiques.

4.1 Le théorème $\mathcal{C}^1$.

Théorème 8. Théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$

On suppose que : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = \ell$ et que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell'$,

Alors la fonction f se prolonge par continuité en a
et le prolongement est $\mathcal{C}^1$ en a .

Démonstration : Soit $x \in]a, b[$

> Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = \ell$, on prolonge f par continuité en a avec $f(a) = \ell$,

De plus on sait que le prolongement de f est continue sur $[a, x]$.

> De plus on sait que f est dérivable sur $]a, x[$ donc on peut appliquer l'égalité des accroissements finis sur $[a, x]$ ainsi

$$\text{il existe } c_x \in]a, x[\text{ tel que } f(x) - f(a) = f'(c_x)(x - a)$$

> On a maintenant $Taux_a = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$.

On a $c_x \in]a, x[$, CàD $a < c_x < x$ donc grâce au théorème des 2 gendarmes, on a $c_x \xrightarrow{x \rightarrow a} a$.

Or $f'(\square) \xrightarrow[\square \rightarrow a]{} \ell'$

$$\text{Ainsi : } Taux_a = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$$

Conclusion : la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = \ell'$. De plus $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$

donc le prolongement est $\mathcal{C}^1$.

Fin $\square$

4.2 Liens entre Dérivabilité et monotonie.

Théorème 9. La dérivée est nulle

Soit I un intervalle et f une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On a équivalence

- (i) f est constante sur I .
- (ii) f est dérivable sur I et f' est nulle.

Démonstration : (i) $\Rightarrow$ (ii)

Je suppose que f est constante égale à K .

Soit $a \in I$. On va démontrer que f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

On étudie le taux

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{K - K}{x - a} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Soit $a \in I$.

On va démontrer que f est constante égale à $f(a)$,

CàD $\forall x \in I, f(x) = f(a)$.

Pour tout $x \in I$, la fonction f est continue et dérivable sur $[a, x]$, donc on peut utiliser l'EAF sur $[a, x]$

ainsi il existe $c_x \in]a, x[$ tel que : $f(x) - f(a) = f'(c_x)(x - a)$.

Or f' est nulle donc $f'(c_x) = 0$ donc $f(x) = f(a)$.

Fin $\square$

Théorème 10. La dérivée est positive

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable de I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On a

f' est (strictement) positive $\Rightarrow f$ est (strictement) croissante.

Démonstration : Soit $a < b \in I$

la fonction f est continue et dérivable sur $[a, b]$ donc on peut utiliser l'EAF sur $[a, b]$

ainsi il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Or f' est positive donc $f'(c) > 0$ et $b > a$ donc $f(b) - f(a) > 0$.

Fin $\square$

5 Exercices

———— Rolle et accroissements finis ————

Exercice 1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère le polynôme $A = 4aX^3 + 3bX^2 + 2cX - a - b - c$.

En appliquant le théorème de Rolle à une primitive de A ,

montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $A(c) = 0$.

Exercice 2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = e$.

Démontrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = f'(c)$

Indication : On pourra utiliser la fonction $h : x \mapsto f(x)e^{-x}$

Exercice 3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) > 0$.

Montrer que : Démontrer qu'il existe $c \in]0, 1[$, $\frac{2f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

Indication : On pourra utiliser la fonction $h : x \mapsto f^2(x)f(1-x)$

Exercice 4. Soit f et g continues sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $c, d \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(d)}$.
2. (a) Montrer que : il existe $e \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(e)}{g'(e)}$.

Indication : On pourra utiliser la fonction définie par $h(x) = f(x) + K g(x)$ Où K est une constante à bien choisir.

(b) Application : Soit f et g deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. On suppose que : $\lim_0 f = \lim_0 g = 0$ et $\lim_0 f' / g' = \ell$.

Montrer que $\lim_0 f / g = \ell$. (C'est le théorème de l'Hospital).

———— Quand Rolle ne s'applique pas ————

Exercice 5. [Correction] Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On suppose de plus que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ et $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$

On va démontrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tq $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$

On considère la fonction ϕ définie par $\phi(x) = \frac{f(x)}{x}$

1. Montrer que la fonction ϕ se prolonge en 0
En déduire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\forall x \in [0, 1]$, $\phi(x) \leq \phi(c)$.
2. Justifier que $c \neq 0$.
3. Déterminer le $DL_1(1)$ de ϕ . En déduire que $c \neq 1$.
4. En déduire que $\phi'(c) = 0$ puis conclure.
Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 6. Soit f est une fonction dérivable sur $[a, b]$ tel que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

1. Faites un dessin. Montrer que la fonction f admet son maximum en un point intérieur.
2. En déduire que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. (C'est le théorème de Darboux).

Égalité-Inégalité des accroissements finis

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

1. Montrer que la fonction F est continue en 0 avec la méthode classique.
2. la fonction F est continue en 0 avec le théorème des accroissements finis.

Exercice 8.

1. Montrer que :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, |\arctan(x) - \arctan(x')| \leq |x - x'|$$

2. Soit $0 \leq a \leq b$. Montrer que :

$$na^{n-1} \leq b^n - a^n \leq nb^{n-1}$$

3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \cosh(x) - 1 \leq x \sinh(x)$$

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, \sqrt{2}]$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} |u_n - 1|$$

3. Justifier que $0 \leq \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} < 1$
4. En déduire que la suite converge vers 1.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{1 + \ln(u_n)}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - e| \leq \frac{e - 1}{2^n}$$

3. Que peut-on conclure ?

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

On va étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in]0, 1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Justifier que $]0, 1[$ est stable par f .
Que peut-on en déduire concernant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\alpha = f(\alpha)$.
Que peut-on en déduire concernant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n$$

Que peut-on en déduire concernant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

— Rolle, Rolle généralisé et Rolle itéré —

Exercice 12. Racine d'un polynôme.

1. Soit P un polynôme de degré 23. Montrer que P admet au moins une racine réelle.
2. Montrer que l'équation $x^{100} + 3x + 2 = 0$ a au plus 2 solutions réelles.
3. Soit P un polynôme de degré 5. Combien au maximum l'équation $e^x = P(x)$ a-t-elle de solution dans $\mathbb{R}$?

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme $A = (X^2 - 1)^n$.

1. Soit $k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$.
Démontrer la théorie de la multiplicité, montrer que $A^{(k)}(1) = A^{(k)}(-1) = 0$.
2. En déduire que $A^{(n)}$ a exactement n racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $a < b$ deux réels.

On suppose que $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et que $f(b) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$

Exercice 15. Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = f(2) = 0$

Montrer que $\forall x, \exists c_x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = (x-1)(x-2) \frac{f^{(2)}(c_x)}{2!}$$

Indication : On pourra utiliser la fonction définie par $h(x) = f(x) + K(x-1)(x-2)$ où K est une constante à choisir.

Exercice 16. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\forall x \in [0, b], \exists c_x \in]0, b[$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(c_x) \frac{x^2}{2!}$$

Indication : On pourra utiliser la fonction h définie par $h(x) = f(x) - \left[f(0) + xf'(0) - K \frac{x^2}{2!} \right]$ où K est une constante à choisir.

Exercice 17. Soit f une fonction réelle admettant n zéros $a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

On suppose que f est n fois dérivable sur $[a_1, a_n]$.

Montrer que $\forall x, \exists c_x \in]a_1, a_n[$ tel que :

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$$

Indication : On pourra utiliser la fonction définie par $h(x) = f(x) + K(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ Où K est une constante à choisir.