

Sujet A

Exercice 1. [Correction] Par abus de langage, dans tout le problème on confond polynôme et fonction polynôme. On considère la fonction f définie de $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = e^{-1/x}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que calculer f' et f''
2. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\text{et vérifier que : } P_{n+1}(X) = (1 - 2nX)P_n(X) + x^2 P_n'(X)$$

3. Avec la question Q1, expliciter : P_0, P_1, P_2 .
4. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 2$, le polynôme P_n est de degré $(n-1)$.
5. Pour tout/chaque n . Comme P_n est un polynôme de degré $n-1$, on écrit $P_n = \underbrace{a_n}_{\neq 0} X^{n-1} + \dots$

Déterminer un équivalent pour la limite de $f^{(n)}(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$

6. Pour tout/chaque n .
 - > En utilisant la relation de récurrence, calculer $P_n(0)$
 - > Déterminer un équivalent pour la limite de $f^{(n)}(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$
 - > Que peut-on déduire de ce calcul ?

7. Vérifier que f est solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle : $x^2 y' - y = 0$

En déduire, en utilisant la formule de Leibnitz, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, P_{n+1}(x) + (2nx - 1)P_n(x) + n(n-1)x^2 P_{n-1}(x) = 0$$

Sujet B

Exercice 2. [Correction] L'objectif de ce problème est d'étudier l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

On suppose que $f \in \mathcal{E}$, que $f(0) = 1$ et il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = 0$

1. On pose $\mathcal{A} = \{x > 0, f(x) = 0\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{A}$ admet une borne inférieure, que l'on note a et montrer que $f(a) = 0$.

(b) Montrer que $a > 0$.

(c) Montrer que : $\forall x \in [0, a[, f(x) > 0$.

2. On pose $\omega = \frac{\pi}{2a}$ et on note $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(\omega x)$.

(a) Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que : $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$.

(b) En déduire, en raisonnant par récurrence sur q , que : $\forall q \in \mathbb{N}, f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

(c) En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right)$.

(d) Justifier que l'équation précédente reste vraie pour $p \in \mathbb{Z}$.

3. On pose $D_a = \left\{\frac{pa}{2^q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général $\frac{\lfloor \frac{2^n x}{a} \rfloor a}{2^n}$ converge vers x .

(b) En déduire que $f = g$.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que calculer f' et f''

La fonction f est fabriquée avec des fonctions usuelles et les opérations classiques

Donc la fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$

De plus on a $\forall x > 0, f(x) = e^{-1/x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{x^3} e^{-1/x} + \frac{1}{x^2} \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$$

2. On démontre par récurrence

$$H_{\langle n \rangle} : \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un polynôme } P_n \\ \text{tel que } \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} \end{array} \right.$$

Initialisation avec $n = 0$.

Comme $\forall x > 0, f(x) = e^{-1/x}$, donc $H_{\langle 0 \rangle}$ est vraie et $P_0(X) = 1$ convient

Hérédité. On suppose $H_{\langle n \rangle}$ est vraie

$$\begin{aligned} \text{Ainsi on a } \forall x > 0, f^{(n+1)}(x) &= \left[f^{(n)}(x) \right]' \\ &= \left[\frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} \right]' \\ &= \frac{P'_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{-2n}{x^{2n+1}} P_n(x) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{(1 - 2nx) P_n(x) + x^2 P'_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

On choisit $P_{n+1}(X) = (1 - 2nX) P_n(X) + X^2 P'_n(X)$. C'est un polynôme qui convient.

Conclusion : $H_{\langle n+1 \rangle}$ est vraie

3. Avec la question Q1, expliciter : P_0, P_1, P_2 .

On a $P_0 = 1, P_1 = 1$ et $P_2 = 1 - 2X$

4. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 2$, le polynôme P_n est de degré $(n - 1)$.

On démontre par récurrence

$$H_{\langle n \rangle} : P_n = \underbrace{a}_{\neq 0} X^{n-1} + \dots$$

Initialisation avec $n = 2$.

Comme $P_2 = 1 - 2X$, donc $H_{\langle 2 \rangle}$ est vraie.

Hérédité. On suppose $H_{\langle n \rangle}$ est vraie

$$\begin{aligned} \text{Ainsi on a } P_{n+1}(X) &= (1 - 2nX) P_n(X) + X^2 P'_n(X) \\ &= (1 - 2nX) \left[a X^{n-1} + \dots \right] + X^2 \left[a(n-1) X^{n-2} + \dots \right] \\ &= X^n \left[-2na + a(n-1) \right] + \dots \\ &= \underbrace{-a(n+1)}_{\neq 0} X^n + \dots \end{aligned}$$

Conclusion : $H_{\langle n+1 \rangle}$ est vraie

5. Pour tout/chaque n . Comme P_n est un polynôme de degré $n - 1$, on écrit $P_n = \underbrace{a_n}_{\neq 0} X^{n-1} + \dots$

Déterminer un équivalent pour la limite de $f^{(n)}(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$

On a $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$

$$P_n(x) = a_n X^{n-1} + \dots \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} a_n X^n [1 + o(1)]$$

$$\underset{x^{2n}}{e^{-1/x}} \underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow} e^0 = 1 \quad \text{donc } e^{-1/x} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 1 [1 + o(1)]$$

$$\text{Conclusion : } f^{(n)}(x) = \frac{a_n X^{n-1} [1 + o(1)]}{x^{2n}} 1 [1 + o(1)] = \frac{a_n}{x^{n+1}} [1 + o(1)] \underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

6. Pour tout/chaque n .

En utilisant la relation de récurrence, calculer $P_n(0)$

On applique la relation de récurrence en $x = 0$, ainsi

$$P_{n+1}(0) = (1 - 2n0) P_n(0) + 0^2 P'(0)$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(0) = P_n(0)$$

Conclusion : La suite $(P_n(0))$ est constante égale à $P_0(0) = 1$

Déterminer un équivalent pour la limite de $f^{(n)}(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$

$$\text{On a } f^{(n)}(x) = \frac{1 [1 + o(1)]}{x^{2n}} e^{-1/x} \underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0. \text{ Croissance Comparée}$$

Que peut-on déduire de ce calcul ?

$$\text{Comme } \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc la fonction est $\mathbb{C}^\infty$ en 0.

7. Vérifier que f est solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle : $x^2 y' - y = 0$

Facile

En déduire, en utilisant la formule de Leibnitz, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, P_{n+1}(x) + (2nx - 1)P_n(x) + n(n - 1)x^2 P_{n-1}(x) = 0$

On dérive n fois l'équation différentielle et on utilise Leibniz, ainsi

$$\begin{aligned} [x^2 y' - y]^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [x^2]^{(k)} [y']^{(n-k)} - y^{(n)} \\ &= \underbrace{1 \cdot x^2 y^{(n+1)}}_{k=0} + \underbrace{n \cdot 2x y^{(n)}}_{k=1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} \cdot 1 y^{(n-1)}}_{k=2} - y^{(n)} \\ &= x^2 \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}} + (2nx - 1) \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n-2}} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \left[P_{n+1}(x) + (2nx - 1)P_n(x) + n(n-1)x^2 P_{n-1}(x) \right] \frac{1}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} = \mathcal{O} \end{aligned}$$

Conclusion : On a bien : $\forall x > 0, P_{n+1}(x) + (2nx - 1)P_n(x) + n(n - 1)x^2 P_{n-1}(x) = 0$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On pose $\mathcal{A} = \{x > 0, f(x) = 0\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{A}$ admet une borne inférieure, que l'on note a

L'ensemble $\mathcal{A}$ est non-vide et minoré par 0

Donc $a = \inf(\mathcal{A})$ existe et $a \geq 0$

montrer que $f(a) = 0$.

Densité et "à la limite"

(b) Montrer que $a > 0$.

Comme $f(a) = 0$ et $f(0) = 1$ donc $a \neq 0$

Conclusion : $a \geq 0$ et $a \neq 0$ donc $a > 0$

Montrer que : $\forall x \in [0, a[, f(x) > 0$.

Par définition de l'inf, on a que $\forall x \in [0, a[, f(x) \neq 0$

Si il existe $x_0 \in [0, a[, f(x) < 0$

Alors avec le TVI appliquer sur $[0, x_0]$, on fabrique $c \in [0, a[$ avec $f(c) = 0$ OUPS

Conclusion : $\forall x \in [0, a[, f(x) \neq 0$ et $f(x) \geq 0$,

CàD $\forall x \in [0, a[, f(x) > 0$.

2. On pose $\omega = \frac{\pi}{2a}$ et on note $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(\omega x)$.

(a) Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que : $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$.

J'applique l'égalité avec $x = y = \frac{a}{2^{q+1}}$,

$$\text{ainsi } f\left(\frac{a}{2^q}\right) + \underbrace{f(0)}_{=1} = 2f^2\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$$

(b) En déduire, en raisonnant par récurrence sur q , que : $\forall q \in \mathbb{N}, f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

On fait par récurrence $H_{<q>} : f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

Initialisation avec $q = 0$.

$$\text{On a } f\left(\frac{a}{2^0}\right) = f(a) = 0$$

$$\text{ET } g\left(\frac{a}{2^0}\right) = g(a) = \cos\left(\frac{\pi}{2a}a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Donc $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité. On suppose $H_{<n>}$

$$\text{On a } f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2.$$

$$\text{Donc en ré-organisant : } \left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \frac{f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1}{2}$$

$$\text{De plus les formules trigos assurent que } \left(g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \left(\cos\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1}{2}$$

$$\text{Ainsi avec } H_{<n>}, \text{ on a } \left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \left(g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$$

Enfin sur $[0, a[$, les fonctions f, g sont positives et $\frac{a}{2^{q+1}} \in [0, a[$

$$\text{donc } \left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \left(g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 \Rightarrow f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$$

- (c) En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right)$.

Soit $a \in \mathbb{N}$ fixé.

On fait par récurrence d'ordre 2 $H_{<p>} : f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right)$.

En effet $f(\square + 1) + f(\square - 1) = 2f(\square)f(1) \implies f(\square + 2) = 2f(\square + 1)f(1) - f(\square)$

- (d) Justifier que l'équation précédente reste vraie pour $p \in \mathbb{Z}$.

Car les fonctions f, g sont paires (à faire)

3. On pose $D_a = \left\{ \frac{pa}{2^q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$.

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général $\frac{[\frac{2^n x}{a}]a}{2^n}$ converge vers x .

On sait que : $\forall \square, \square - 1 < [\square] \leq \square$

On encadre et on conclut avec le thm des gendarmes.

- (b) En déduire que $f = g$.

Densité