

Exercice 1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

1. Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0.
2. En déduire qu'il existe $\alpha < 0$ tel que : $\forall x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}], \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} \leq \alpha$

Application : Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que : $\forall x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}], \cos(x) \leq e^{-ax^2}$

Exercice 2. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$.

Montrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a - a_k| = \frac{1}{2}$

Exercice 3. Soit a, b deux réel avec $a < b$.

Soit f continue sur $[a, b]$ et g continue et positive sur $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe $u, v \in [a, b]$ tel que

$$\underbrace{m}_{=f(u)} \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t) g(t) dt \leq \underbrace{M}_{=f(v)} \int_a^b g(t) dt$$

2. En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t) g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$

Exercice 4. Lemme de la corde "presque facile"

On considère une fonction f continue sur $\mathcal{D} = [0, 1]$ avec $f(0) = f(1) = 0$.

1. *Lemme de la corde "facile"*

On suppose que : la fonction f est à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et on prend $\lambda \in]0, 1[$

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$, tel que $f(x_0 + \lambda) = f(x_0)$.

2. *Lemme de la corde "difficile" sans les indication*

On suppose que : la fonction f est à valeur dans $\mathbb{R}$

On considère la fonction ϕ définie par $\phi(x) = f(x + 1/n) - f(x)$.

(a) Calculer $\phi\left(\frac{0}{n}\right) + \phi\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + \phi\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

(b) Montrer avec un RA que : $\exists k_0 \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}, \phi\left(\frac{k_0}{n}\right) \geq 0$

(c) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$, tel que $f(x_0 + 1/n) = f(x_0)$.