

Exercice 1.

1. Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite quand $h \rightarrow 0$

$$\frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction paire $\mathcal{C}^\infty$

Étudier la parité de $f^{(n)}$.

3. En utilisant Leibniz, calculer la dérivée n-ième pour de $\frac{e^{2x}}{x+1}$.

———— Formule de la moyenne ————

Soit a, b deux réel avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

On va montrer que : qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$

Exercice 2. Démonstration avec le TVI

1. Montrer qu'il existe $u, v \in [a, b]$ tel que

$$\underbrace{m}_{=f(u)}(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \underbrace{M}_{=f(v)}(b-a)$$

2. En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$

Exercice 3. Démonstration avec le TAF

Justifier que $\int_a^b f(t)dt = \mathcal{H}(b) - \mathcal{H}(a)$

En déduire avec le TAF qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$

———— Rolle et EAF ————

Exercice 4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère le polynôme $A = 4aX^3 + 3bX^2 + 2cX - a - b - c$.

En appliquant le théorème de Rolle à une primitive de A ,

montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $A(c) = 0$.

Exercice 5. [Correction] Soit f et g continues sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

1. En utilisant 2 fois l'EAF, montrer qu'il existe $c, d \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(d)}$.

2. Le théorème de l'Hospital

(a) Montrer que : il existe $e \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(e)}{g'(e)}$.

Indication : On pourra utiliser la fonction définie par $h(x) = f(x) + K g(x)$ où K est une constante à bien choisir.

(b) Application : Soit f et g deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$

On suppose que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)/g'(x) = \ell$.

Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Exercice 6. [Correction] Formule d'approximation de Simpson

L'objectif de cet exercice est de démontrer que

$$\left| \int_0^1 g(t)dt - \frac{1}{6} [g(0) + 4g(1/2) + g(1)] \right| \leq \frac{1}{2880} \underbrace{\sup_{x \in [a,b]} |g^{(4)}(x)|}_{=\|g^{(4)}\|}$$

Soit g est une fonction $\mathcal{C}^4$ sur un segment $[0, 1]$.

On note : $I = \int_0^1 g(t)dt$ et $c = 1/2$ et $J = \frac{1}{6} [g(0) + 4g(c) + g(1)]$

Soit K étant une constante réelle, on considère les fonctions D et E définies par :

$$D(x) = \int_{c-x}^{c+x} g(t)dt - \frac{x}{3} [g(c+x) + g(c-x) + 4g(c)] \quad \text{et} \quad E(x) = D(x) - Kx^5$$

On admet que les fonctions D et E sont bien $\mathcal{C}^4$ sur $[0, 1]$.

1. Exprimer $D(c)$ en fonction de I et J .
2. Calculer les dérivées de E jusqu'à l'ordre 3 inclus en fonction des dérivées de g .
En déduire que : $E(0) = 0$, $E'(0) = 0$, $E''(0) = 0$ et $E'''(0) = 0$.
3. On choisit la constante K de façon que : $E(c) = 0$.
(a) En utilisant plusieurs fois le théorème de Rolle, montrer qu'il existe un réel u strictement compris entre 0 et c tel que :

$$K = -\frac{g'''(c+u) - g'''(c-u)}{180u}$$

- (b) En déduire qu'il existe un réel v strictement compris entre a et b tel que : $K = -\frac{g^{(4)}(v)}{90}$

4. En utilisant que $E(c) = 0$, montrer que : $|I - J| \leq \frac{1}{2880} \|g^{(4)}\|$

Exercice 7. Soient deux réels $a < b$, un entier strictement positif n et une fonction $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b], \mathbb{R})$.

1. On définit sur $[a; b]$ la fonction φ_n par :

$$\varphi_n(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k - K \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

> Justifier que l'on peut choisir $K \in \mathbb{R}$ est tel que $\varphi_n(a) = 0$.

> Calculer φ'

> Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que : $f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

Ce résultat est appelé égalité de Taylor-Lagrange d'ordre $n+1$.

2. Application : L'inégalité de Kolmogorov. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $|f|$ et $|f''|$ sont bornées respectivement par deux réels positifs M_0 et M_2 .

(a) Écrire l'égalité de Taylor-Lagrange d'ordre 2 sur $[a, a+u]$ et $[a-u, a]$

(b) En déduire que : $|f'(a)| \leq \frac{2M_0}{u} + \frac{u}{2}M_2$

(c) En déduire : $|f'| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$

TVI sans la continuité

Exercice 8. Soit f est une fonction dérivable sur $[a, b]$ tel que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

1. Montrer que la fonction f admet un maximum.
2. Montrer que : Au voisinage de a^+ , $f(x) > f(a)$.
3. En déduire que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. (C'est le théorème de Darboux).

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. On a

> La fonction f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$,
Donc d'après l'EAF, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

> La fonction g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$,
Donc d'après l'EAF, il existe $d \in]a, b[$ tel que $g(b) - g(a) = g'(d)(b - a)$

$$\text{Conclusion : } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)(b - a)}{g'(d)(b - a)} = \frac{f'(c)}{g'(d)}$$

2. Le théorème de l'Hospital

(a) L'objectif est d'utiliser le thm de Rolle avec la fonction h .

> La fonction h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

> On choisit K tel que $h(a) = h(b)$, Or

$$h(a) = h(b) \iff f(a) + K g(a) = f(b) + K g(b) \iff K = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$\text{Donc je choisis } K = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \text{ et on a } h(a) = h(b)$$

Ainsi d'après le théorème de Rolle, on sait qu'il existe $e \in]a, b[$, tel que

$$\begin{aligned} h'(e) = 0 &\iff f'(e) + K g'(e) = 0 \\ &\iff -K = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(e)}{g'(e)} \end{aligned}$$

(b) Cette question c'est "comme la démo du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ ".

> On prolonge f et g par continuité en $x = 0$ avec $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$

> On applique le résultat précédent sur la segment $[0, x]$

$$\text{ainsi il existe } e_x \in]0, x[\text{ tel que } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(e_x)}{g'(e_x)}$$

> Comme $0 < e_x < x$, on sait (thm des gendarmes) que : $c_x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

> Conclusion : Comme $\lim_{\square \rightarrow 0} f'(\square)/g'(\square) = \ell$ et que $c_x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,

$$\text{on a bien } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(e_x)}{g'(e_x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ell$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) Méthode de Simpson

1. On a $c + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} = b$ et $c - \frac{b-a}{2} = a$, ainsi

$$D\left(\frac{b-a}{2}\right) = \int_a^b g(t) dt - \frac{b-a}{3} [g(a) + g(b) + 4g(c)] = I - J$$

2. Comme g est $\mathcal{C}^4$, la fonction D est $\mathcal{C}^4$ et on a

$$\begin{aligned} D'(x) &= g(c+x) + g(c-x) - \frac{1}{3} [g(c+x) + g(c-x) + 4g(c)] - \frac{x}{3} [g'(c+x) - g'(c-x)] \\ &= \frac{2}{3} [g(c+x) + g(c-x)] - \frac{x}{3} [g'(c+x) - g'(c-x)] - \frac{4}{3} g(c) \end{aligned}$$

$$D''(x) = \frac{2}{3} [g'(c+x) - g'(c-x)] - \frac{1}{3} [g'(c+x) - g'(c-x)] - \frac{x}{3} [g''(c+x) + g''(c-x)]$$

$$= \frac{1}{3} [g'(c+x) - g'(c-x)] - \frac{x}{3} [g''(c+x) + g''(c-x)]$$

$$D'''(x) = -\frac{x}{3} [g'''(c+x) - g'''(c-x)]$$

3. On a facilement $E(0) = E'(0) = E''(0) = E'''(0) = 0$

$\Rightarrow$ On applique le théorème de Rolle à la fonction E sur $\left[0, \frac{b-a}{2}\right]$ car $E(0) = E\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0$

Ainsi il existe $\alpha \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[$ tel que $E'(\alpha) = 0$

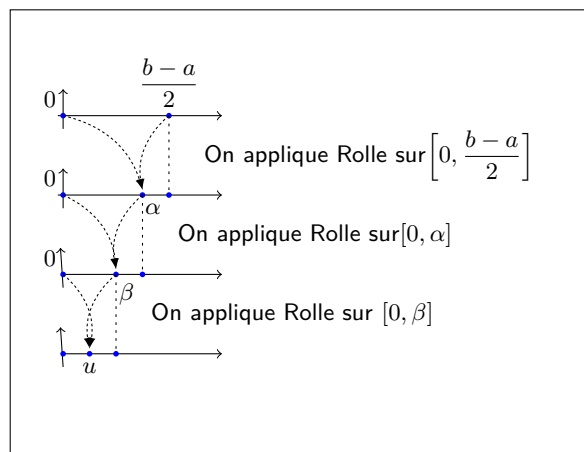
$\Rightarrow$ On applique le théorème de Rolle à la fonction E' sur $[0, \alpha]$ car $E'(0) = E'(\alpha) = 0$.

Ainsi il existe $\beta \in]0, \alpha[$ tel que $E''(\beta) = 0$

$\Rightarrow$ On applique le théorème de Rolle à la fonction E'' sur $[0, \beta]$ car $E''(0) = E''(\beta) = 0$

Ainsi il existe $u \in]0, \beta[$ tel que $E'''(u) = 0$

Un Bô dessin qui illustre le discours ci-contre



$$\text{Or } E'''(u) = -\frac{u}{3} [g'''(c+u) - g'''(c-u)] - K.5.4.3.u^2$$

$$\Rightarrow K = -\frac{g'''(c+u) - g'''(c-u)}{5.4.3.3 u} = -\frac{g'''(c+u) - g'''(c-u)}{180 u}$$

Enfin on applique le TAF ainsi $g'''(c+u) - g'''(c-u) = g^{(4)}(v) [2u]$

$$\text{Conclusion : } K = -\frac{g^{(4)}(v)}{90} \quad \text{FINI ouf 4.}$$

4. Comme $E\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0$, on a $I - J = D\left(\frac{b-a}{2}\right) = -\frac{g^{(4)}(v)}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5$

$$\text{Donc } |I - J| = \left| -\frac{g^{(4)}(v)}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^5}{90 * 2^5} |g^{(4)}(v)|$$

$$\leq \frac{(b-a)^5}{2880} \sup(|g^{(4)}(v)|, v \in [a, b])$$

De plus $\sup \left(\left| g^{(4)}(v) \right|, v \in [a, b] \right) = \|g^{(4)}\|_{\infty, [a, b]}$ est fini car $g^{(4)}$ est continue sur le segment $[a, b]$.