

Programme de colle de la semaine 22

du Lundi 30 Mars au Vendredi 03 Avril.

Questions de cours et autour du cours.

> Signe au voisinage de a^+

On suppose que $f(x) = f(a+h) = 1 + 2h + o(h)$

Énoncer en math et Démontrer que la fonction f est > 1 au voisinage de a^+

> Lien entre extremum et point critique.

Montrer que : Soient f et g deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$

$$\left. \begin{array}{l} f \leq g \text{ sur } I \\ f(x_0) = g(x_0) \\ x_0 \text{ n'est pas une borne de } I \end{array} \right\} \implies f'(x_0) = g'(x_0)$$

Illustrer et expliquer le résultat avec les fonction $f : t \mapsto f(t) = e^{-t} \sin(t)$ et $g : t \mapsto g(t) = e^{-t}$

> Accroissements finis.

Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis (on admet Rolle).

Pour la démonstration, on utilisera la fonction $h : x \mapsto f(x) - f(a) - K(x - a)$ où K est une constante choisir

> Le théorème $\mathcal{C}^1$.

Énoncer et démontrer le théorème $\mathcal{C}^1$

Je sais c'est difficile mais c'est un des exercices de la banque CCP

> Division euclidienne.

Énoncer les théorèmes de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Démontrer l'unicité dans les 2 cas.

> Reste de la division euclidienne.

Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 5X + 6$.

Application : Montrer que le polynôme $X^2 + 5X + 6$ annule la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

En déduire A^n

> Racine. Soit A un polynôme et $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer l'équivalence

$$A(r) = 0 \iff (X - r) \text{ se factorise dans } A$$

> Racine. Soit A un polynôme et r, r', r'' des racines deux à deux différentes.

Montrer que : $(X - r)(X - r')(X - r'')$ se factorise dans A

Exercices

Le exercices autour Rolle-TAF-... sont toujours délicat, MAIS on peut faire des polynômes