

————— Dérivée n-ième —————

Exercice 1. [Correction] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [0, 1[, f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

1. Démontrer que f est solution sur $[0, 1[$ de l'équation différentielle : $(1-x^2)y' = xy$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dérive n fois l'équation différentielle, en déduire une relation
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f^{(n)}(x) \geq 0$.

— Un fonction définie par une intégrale —

Exercice 2. [Correction] On considère la fonction f définie par l'expression

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t + \sin t} dt$$

1. On considère la fonction $\phi : t \mapsto \frac{1}{t + \sin t}$
 - (a) Étudier la fonction $h : x \mapsto x + \sin(x)$
Justifier que 0 est l'unique solution de l'équation $t + \sin t = 0$.
 - (b) En déduire que la fonction ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
3. Étudier la parité de f .
4. Dérivabilité.
 - (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $f'(x)$.
 - (b) Déterminer un équivalent de $f'(x)$ quand $x \rightarrow 0$.
Application : La fonction f est-elle monotone au voisinage de 0^+ ?
5. Limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
 - (a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$, on ait : $t + \sin t \geq \frac{t}{2}$.
 - (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t(t + \sin t)}$.
 - (c) Dédire des 2 questions précédentes que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \ln(2)$.
6. Question bonus difficile et non-guidée.

Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 et déterminer $f(0)$.

Idée : On a $\frac{1}{t + \sin t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2t}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t + \sin t} - \frac{1}{2t}$ se prolonge en 0 et admet un DL

Donc on peut intégrer ce DL

.....

————— Pour aller plus loin —————

Exercice 3. [Correction] Soit f une fonction définie continue et **positive** sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit la fonction g définie par : $g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x \sin t} dt$.

1. Montrer que g est définie et décroissante sur $] -1, +\infty[$.

2. On suppose dans cette question que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(t) = \sin(2t)$.

Calculer $g(x)$. *on pourra faire le changement de variable $u = \sin(t)$*

3. Soit $a > -1$ un réel.

Montrer que la fonction g est lipschitzienne sur $[a, +\infty[$

4. Limite de g en $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$

(a) Montrer qu'il existe M tel que : $\forall x > 0, g(x) \leq M\varepsilon + \frac{M\pi}{2(1+x \sin \varepsilon)}$.

(b) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

Exercice 4. [Correction] Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On suppose de plus que $f(0) = 0, f'(0) = 0$ et $f(1) = 1, f'(1) = 0$

On va démontrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tq $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$

On considère la fonction ϕ définie par : $\forall x \in]0, 1], \phi(x) = \frac{f(x)}{x}$ et $\phi(0) = 0$

1. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\forall x \in [0, 1], \phi(x) \leq \phi(c)$.

2. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [1 - \eta, 1[, \phi(x) > \phi(1)$.

3. Montrer que $c \in]0, 1[$.

Justifier que $c \neq 0$. En déduire que $\phi'(c) = 0$ puis conclure.

4. Interpréter géométriquement le résultat.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Démontrer que f est solution sur $[0, 1[$ de l'équation différentielle : $(1 - x^2) y' = x y$.

La fonction f est fabriquée avecdonc elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[$

$$\text{et } \forall x \in [0, 1[, f'(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right] = [h(u)]' = (-2x) \frac{1}{2} (1-x^2)^{-3/2} = \frac{-x}{1-x^2} f(x).$$

Donc f est bien solution de l'équation différentielle : $(1 - x^2) y' = x y$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dérive n fois l'équation différentielle, en déduire une relation

Comme $(1 - x^2) f' = x f$, on a avec Leibniz

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{[(1-x^2)]^{(k)}}_{=0 \text{ Si } k \geq 3} [f']^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{[(x)]^{(k)}}_{=0 \text{ Si } k \geq 2} [f]^{(n-k)}$$

$$(1-x^2)f^{(n+1)} + n(-2x)f^{(n)} + \binom{n}{2}(-2)f^{(n-1)} = (x)f^{(n)} + n(1)f^{(n-1)}$$

Ainsi on a sur $[0, 1[$, $(1-x^2)f^{(n+1)} = (2n+1)x f^{(n)} + n^2 f^{(n-1)}$

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f^{(n)}(x) \geq 0$.

On fait avec une récurrence à 2 étages $H < n >: \forall x \in [0, 1[, f^{(n)}(x) \geq 0$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Correction rapide.

1. On considère la fonction $\phi : t \mapsto \frac{1}{t + \sin t}$

(a) Étudier la fonction $h : x \mapsto x + \sin(x)$

La fonction h est dérivable et $\forall x, h'(x) = 1 + \cos(x) \geq 0$

D'où le bô tableau.

Justifier que 0 est l'unique solution de l'équation $t + \sin t = 0$.

La fonction h est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi l'équation admet une unique solution.

De plus 0 est une solution évidente de l'équation

Conclusion : 0 est bien l'unique solution de l'équation $xt + \sin(t) = 0$.

(b) En déduire que la fonction ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$

Comme 0 est l'unique réel solution de l'équation $xt + \sin(t) = 0$, la fonction ϕ est définie sur $\mathbb{R}^*$

De plus elle est fabriquée avec les fonctions usuelles et les opérations classiques

Conclusion : la fonction ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$

2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

Le nombre $f(x)$ se calcule Ssi

Ssi la fonction $\phi : x \mapsto \frac{1}{x + \sin(x)}$ est continue sur $[x, 2x]$

Ssi $[x, 2x] \subset \mathbb{R}^*$

Conclusion : La fonction f est définie sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

3. Étudier la parité de f .

Pour tout $x \neq 0$, $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{t + \sin t} dt$.

On fait le changement de variable $u = -t$.

4. Dérivabilité.

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $f'(x)$.

Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t + \sin t}$ est continue,

la théorie des intégrales assurent que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \text{De plus on a } \forall x \neq 0, f'(x) &= \frac{d}{dx} [\mathcal{H}(2x) - \mathcal{H}(x)] \\ &= \frac{2}{2x + \sin(2x)} - \frac{1}{x + \sin(x)} \\ &= \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{(2x + \sin(2x))(x + \sin(x))} \end{aligned}$$

Bonus La fonction f est dérivable et f' est $\mathcal{C}^\infty$ donc la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$

(b) Déterminer un équivalent de $f'(x)$ quand $x \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \text{on a } \forall x \neq 0, f'(x) &= \frac{2}{2x + \sin(2x)} - \frac{1}{x + \sin(x)} = \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{(2x + \sin(2x))(x + \sin(x))} \\ &> x + \sin(x) = x + (x + \mathcal{O}(x^3)) = 2x + \mathcal{O}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x[1 + o(1)] \\ &> 2x + \sin(2x) = 2x + (2x + \mathcal{O}(x^3)) = 2x + \mathcal{O}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 4x[1 + o(1)] \\ &> 2\sin(x) - \sin(2x) = 2(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)) - (2x - \frac{8x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)) = \frac{6}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3[1 + o(1)] \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3}{(4x) \cdot (2x)} [1 + o(1)] \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{8}$$

Application : La fonction f est-elle monotone au voisinage de 0^+ ?

On a $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{8}$ et $\frac{x}{8} > 0$ en 0^+

Conclusion : f' est positive au voisinage de 0^+ .

5. Limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

(a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$, on ait : $t + \sin t \geq \frac{t}{2}$.

J'applique le définition de $\frac{t + \sin(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1$ avec $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$.

(b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t(t + \sin t)}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x > 0, \text{ on a } \left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| &= \left| \int_x^{2x} \frac{1}{t + \sin t} dt - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \\ &= \left| \int_x^{2x} \frac{1}{t + \sin t} - \frac{1}{t} dt \right| \\ &= \left| \int_x^{2x} \frac{-\sin t}{(t + \sin t)t} dt \right| \end{aligned}$$

Fin des calculs, inégalité triangulaire

$$\leq \int_x^{2x} \left| \frac{-\sin t}{(t + \sin t)t} \right| dt$$

Comme $x > 0$, tout est > 0 et $|\sin(t)| \leq 1$

$$\leq \int_x^{2x} \frac{1}{(t + \sin t)t} dt$$

(c) Dédurre des 2 questions précédentes que $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} \ln(2)$.

On a

$$> \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln(2)$$

$$> \text{grâce à la question 5.a., } \int_x^{2x} \frac{dt}{t(t + \sin t)} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t(t/2)} = 2 \left[\frac{-1}{t} \right]_x^{2x} = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Conclusion : } \left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| = |f(x) - \ln(2)| \leq \frac{1}{x}$$

Le théorème de la distance permet de conclure que $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} \ln(2)$.

(d) Question bonus difficile et non-guidée.

Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 et déterminer $f(0)$.

Étape 1 : DL et prolongement

On a facilement $\frac{1}{t + \sin t} = \frac{1}{t + (t + o(t))} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2t}$ et

$$\frac{1}{t + \sin t} - \frac{1}{2t} = \frac{t - \sin t}{(t + \sin t)2t} = \frac{\frac{t^3}{3}[1 + o(1)]}{4t^2[1 + o(1)]} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{12}$$

$$\text{Donc } h(t) = \frac{1}{t + \sin t} - \frac{1}{2t} = \frac{t}{12} + o(t)$$

Ainsi la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{t + \sin t} - \frac{1}{2t}$ se prolonge par continuité en 0

et admet le DL $h(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{12} + o(t)$

Étape 2 : Primitivation du DL

La fonction h est continue et admet un DL donc on peut primitiver

$$\text{Ainsi } \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(0) + \frac{t^2}{24} + o(t^2)$$

Étape 3 : Finalisation

On a maintenant $\int_x^{2x} h(t)dt = \mathcal{H}(2x) - \mathcal{H}(x)$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{H}(0) + \frac{(2x)^2}{24} + o(x^2) - \mathcal{H}(0) - \frac{x^2}{24} + o(x^2) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_x^{2x} h(t)dt &= \int_x^{2x} \left[\frac{1}{t + \sin t} - \frac{1}{2t} \right] dt \\
 &= f(x) - \int_x^{2x} \frac{1}{2t} dt \\
 &= f(x) - \frac{1}{2} (\ln(2x) \ln(x)) \\
 &= f(x) - \frac{\ln(2)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{\ln(2)}{2}$$

la fonction f se prolonge par continuité en 0 et déterminer $f(0) = \frac{\ln(2)}{2}$.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Montrer (admettre) que g est définie sur $]-1, +\infty[$.

On peut calculer le nombre $g(x)$ Si la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1+x \sin t}$ est continue sur $[0, \pi/2]$

Lorsque $x > -1$, on a sur $[0, \pi/2]$, $1+x \sin t > 1-1=0$.

Ainsi pour $x > -1$ le nombre $g(x)$ se calcule bien.

Montrer que g est décroissante sur $]-1, +\infty[$.

Pour $x > y$, on a

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x \sin t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+y \sin t} dt \\ &\leq \underbrace{(y-x)}_{<0} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{f(t) \sin(t)}{(1+x \sin t)(1+y \sin t)}}_{\geq 0 \text{ sur } [0, \pi/2]} dt \leq 0 \end{aligned}$$

Donc la fonction g est décroissante sur $]-1, +\infty[$.

2. On suppose dans cette question que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(t) = \sin(2t)$.
on a

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2t)}{1+x \sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin(t) \cos(t)}{1+x \sin(t)} dt$$

On fait le changement de variable $u = \sin(t)$

Puis on décompose en éléments simples la fraction

3. Soit $a > -1$ un réel. Montrer que la fonction g est lipschitzienne sur $[a, +\infty[$

Pour tout $(x, y) \in]a, +\infty[^2$, on a

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left| \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x \sin t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+y \sin t} dt \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/2} \left| f(t) \frac{(y-x) \sin(t)}{(1+x \sin t)(1+y \sin t)} \right| dt \\ &\leq \int_0^{\pi/2} |f(t)| \frac{|y-x| |\sin(t)|}{(1+x \sin t)(1+y \sin t)} dt \\ &\leq |y-x| \underbrace{\int_0^{\pi/2} |f(t)| \frac{|\sin(t)|}{(1+a)(1+a)} dt}_{=K} \end{aligned}$$

La fonction est K-lipschitzienne donc continue sur $]a, +\infty[$

Ainsi la fonction g est continue sur $]-1, +\infty[$

4. Limite de g en $+\infty$.

Montrer qu'il existe M tel que : $\forall x > 0$, $g(x) \leq M\varepsilon + \frac{M\pi}{2(1+x \sin \varepsilon)}$.

La fonction f est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit M un majorant de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\varepsilon > 0$.

Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x \sin t} dt = \int_0^\varepsilon \frac{f(t)}{1+x \sin t} dt + \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x \sin t} dt \\ &\leq \int_0^\varepsilon \frac{M}{1+0} dt + \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{M}{1+x \sin(\varepsilon)} dt \\ &\leq M\varepsilon + \frac{M}{(1+x \sin \varepsilon)} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \\ &\leq M\varepsilon + \frac{M\pi}{2(1+x \sin \varepsilon)} \end{aligned}$$

En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

On conclut à la mode Cesàro que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\forall x \in [0, 1], \phi(x) \leq \phi(c)$.

La fonction ϕ est continue sur $]0, 1]$ car composée de fonction continue.

En 0.

Comme la fonction f est dérivable en 0, on sait que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x) = o(x)$

Ainsi $\phi(x) = \frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{o(x)}{x} = o(1) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ et $f(0) = 0$

Donc la fonction ϕ est continue en 0

Ainsi la fonction ϕ est continue sur $[0, 1]$

Maintenant la fonction ϕ est continue sur le segment $[0, 1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes

Conclusion : il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\forall x \in [0, 1], \phi(x) \leq \underbrace{M}_{=\phi(c)}$.

2. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [1 - \eta, 1[, \phi(x) > \phi(1)$.

On considère $Q(x) = \frac{\phi(x)}{\phi(1)}$

On va démontrer que $Q(x) > 1$ au voisinage de 1^-

On a $Q(x) = \frac{\phi(x)}{\phi(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{\phi(1)}{\phi(1)} = 1$

Pas glop la limite ne conclut pas

On a plus précisément

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{\phi(x)}{\phi(1)} = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(1+h)}{1+h} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} [f(1) + f'(1)h + o(h)] [1 - h + o(h)] \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} [1 + 0h + o(h)] [1 - h + o(h)] = 1 - h + o(h) \end{aligned}$$

Conclusion : $Q(x) = Q(1+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 1^+$, ainsi il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [1 - \eta, 1[, \phi(x) > \phi(1)$.

3. Montrer que $c \in]0, 1[$.

La question Q2 assure que $c \neq 1$ et comme $\phi(0) = 0 < 1 = \phi(1)$ donc $c \neq 0$

Conclusion : $c \in]0, 1[$

En déduire que $\phi'(c) = 0$ puis conclure.

la fonction ϕ atteint son max en c et c n'est pas une borne et ϕ est dérivable en $c \in]0, 1[$

Conclusion : $\phi'(c) = 0$

Comme $x \in]0, 1[$, on a facilement en ré-organisant

$$\phi'(c) = 0 \iff \frac{f'(c)c - f(c)}{c^2} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$

4. Interpréter géométriquement le résultat.