

Exercice 1. L'objectif de ce problème est de montrer que si p est un entier strictement positif alors

$$\zeta(2p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^{2p}} \quad \text{est un multiple } \textit{rationnel} \text{ de } \pi^{2p}$$

On retrouvera alors la formule $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et on calculera la valeur de $\zeta(4)$.

Pour cela nous introduirons les «formules de Newton» qui permettent d'exprimer les sommes de puissances des racines d'un polynôme scindé à l'aide de ses fonctions symétriques. On appliquera ces formules à une famille de polynômes à coefficients entiers dont les racines s'expriment à l'aide de la fonction cotangente, qui, restreinte à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ sera notée

$$\cot: \begin{cases}]0; \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\cos x}{\sin x} \end{cases}$$

Si a et b sont des nombres complexes et p un entier positif on rappelle la formule de factorisation :

$$a^p - b^p = (a - b) \left(\sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-1-i} \right) \quad (*)$$

Commentaire.

- > La partie I sur les formules de Newton est d'un bon niveau Mine/Centrale
- > La partie II fait un peu peur mais n'est pas si difficile mais d'un bon niveau
- > La partie III est plus facile MAIS ...

Conclusion : Dur, dur , dur

Partie I - Formules de Newton

Soit A un polynôme de degré $n \geq 1$, de racines (pas nécessairement distinctes) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$,

$$A = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n = a_n(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n).$$

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on rappelle que sa k -ième fonction symétrique élémentaire est définie par :

$$\sigma_0 = 1, \quad \text{et si } k \geq 1 \quad \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on notera S_p sa p -ième somme de Newton définie par : $S_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i^p$

1. Cas $n = 3$.

(a) Exprimer σ_1, σ_2 et σ_3 en fonctions de α_1, α_2 et α_3 puis en fonction de a_0, a_1, a_2 et a_3 .

(b) Exprimer alors les sommes de Newton

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad S_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \quad \text{et} \quad S_3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$$

en fonction de σ_1, σ_2 et σ_3 .

(c) Application. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que
$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 26 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 38 \end{cases}$$

2. Cas général $n \in \mathbb{N}^*$

(a) Sans justifier, rappeler pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ l'expression de la fonction symétrique σ_j à l'aide de j, a_n et a_{n-j} et écrire l'expression développée de A à l'aide de a_n et des fonctions symétriques $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

(b) En exprimant le fait que les α_k (pour $1 \leq k \leq n$) sont racines de A , établir la formule de Newton d'ordre n :

$$S_n - \sigma_1 S_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} S_1 + (-1)^n n \sigma_n = 0$$

3. Nous allons généraliser cette formule à tout entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$.

(a) Justifier $A'(X) = \sum_{i=1}^n \frac{A(X) - A(\alpha_i)}{X - \alpha_i}$

(b) En utilisant la formule de factorisation (*),

$$\text{montrer que : } A'(X) = a_n \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sigma_j \left(\sum_{k=0}^{n-j-1} \alpha_i^k X^{n-j-k-1} \right)$$

$$\text{puis montrer que : } A'(X) = a_n \sum_{0 \leq k \leq p \leq n-1} (-1)^{p-k} \sigma_{p-k} S_k X^{n-p-1}$$

(c) En reprenant alors l'expression obtenue à la question 2.a, en déduire pour tout $1 \leq p \leq n-1$ les formules de Newton d'ordre p :

$$S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \dots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1} S_1 + (-1)^p p \sigma_p = 0$$

Partie II - Familles de polynômes

Pour tout entier $n \geq 1$ on définit le polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ par $P_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}$

1. Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n en fonction de n .
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Im}((\cos x + i \sin x)^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \cos^{2n-2k} x \sin^{2k+1} x$$

(où $\operatorname{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z)

(b) Établir, si $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $P_n(\cot^2(x)) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1} x}$

(c) En déduire $P_n = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(X - \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)$

3. Soient $n \geq 1$ et $k \in [1; n]$, montrer que la k -ième fonction symétrique de P_n est donnée par

$$\sigma_k(n) = \frac{(2n)!}{(2n-2k)!(2k+1)!}$$

4. L'écriture précédente permet, en identifiant n à la variable, de définir pour tout $k \geq 1$ un polynôme que l'on notera également σ_k à coefficients réels. On a ainsi

$$\sigma_1 = \frac{2X(2X-1)}{3!} = \frac{2}{3}X^2 - \frac{1}{3}X.$$

- (a) Donner l'écriture développée du polynôme σ_2 .
 - (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le polynôme σ_k est à coefficients rationnels et de degré $2k$.
Exprimer son coefficient dominant en fonction de k .
5. On définit par récurrence une famille de polynômes S_p pour $p \geq 1$ à l'aide des formules de Newton :

$$S_p = \sigma_1 S_{p-1} - \dots - (-1)^{p-1} \sigma_{p-1} S_1 - (-1)^p p \sigma_p = - \left(\sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \sigma_i S_{p-i} \right) - (-1)^p p \sigma_p$$

- (a) Calculer S_1 et S_2 .
- (b) Montrer que pour tout $p \geq 1$, le polynôme S_p est à coefficients rationnels, de degré au plus $2p$.
- (c) Justifier que pour tout $p \geq 1$ et tout $n \geq p$ on a

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^n \cot^{2p} \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

- (d) En déduire que si on note s_p le coefficient du terme en X^{2p} de S_p alors

$$s_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \cot^{2p} \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)}{n^{2p}}$$

Partie III - Encadrement des sommes partielles

1. Pour tout réel $0 < x < \frac{\pi}{2}$, montrer que : $\sin x < x < \tan x$, puis $0 < \frac{1}{x^2} - \cot^2 x < 1$
2. Soit p un entier strictement positif, en utilisant la formule de factorisation (*) rappelée dans l'introduction du problème, montrer

$$0 < \frac{1}{x^{2p}} - \cot^{2p} x < \frac{p}{x^{2(p-1)}} \quad \text{pour } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

3. Établir alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 < \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2p} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2p}} - \sum_{k=1}^n \cot^{2p} \left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < p \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2(p-1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2(p-1)}}$$

4. Montrer alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^{2p}} = \frac{s_p}{2^{2p}} \pi^{2p}$$

En déduire le résultat annoncé, CàD $\zeta(2p)$ est un multiple rationnel de π^{2p} .

5. Calculer les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.