Racine, rigidité des polynômes.

1 Divise et division euclidienne.

1.1 Divise.

Définition 1.
On considère deux polynômes A et B

On dit que A divise B, noté $A|B$ *ou* A divise B, Ssi

$$\text{Il existe un polynôme } P \text{ tel que } B = AP$$

Vocabulaire : on dit alors que A est un diviseur de B et que B est un multiple de A.
Remarque : Il est clair que la relation divise est transitive.

Théorème 2. Formulaire.
Soit A, B, C des polynôme non nul.

> A divise $B \implies \deg A \leqslant \deg B$. Remarque : C'est faux si $B = 0$

On a donc

$$\left.\begin{array}{c} A \text{ divise } B \\ \deg A \underset{Strict}{>} \deg B \end{array}\right\} \implies B = 0$$

> La relation *divise* est presque anti-symétrique.

$$\left.\begin{array}{c} A \text{ divise } B \\ \text{et} \\ B \text{ divise } A \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} \text{Il existe une constante } \lambda \\ \text{tel que } A = \lambda B \end{array}$$

Démonstration : Comme A divise B, il existe un polynôme P tel que $B = AP$.
On sait que

$$B = AP \implies \deg B = \deg A + \deg P$$

Comme $B \neq 0$, on a $P \neq 0$ et donc $\deg(P) \geqslant 0$.
Conclusion : $\deg A \leqslant \deg B$.
Si de plus $\deg A = \deg B$ alors $\deg P = 0$ donc P est une constante.

Fini □

> Démonstration "presque anti-symétrique".

On suppose que A *divise* B ET que B *divise* A

> Situation 1 : On suppose que A ou B est égale à 0
Alors forcément (à faire) $A = B = 0$. Je choisis $\lambda = \ln(2)$ fini.

> Situation 2 : On suppose maintenant que A ET B sont $\neq 0$.

On a avec ce qui précède

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ divise } B \Longrightarrow \deg A \leqslant \deg B \\ \text{et} \\ B \text{ divise } A \Longrightarrow \deg B \leqslant \deg A \end{array}\right\} \Longrightarrow \deg A = \deg B \geqslant 0_{\text{car} \neq 0}$$

On applique (i) et c'est fini.

Fini □

1.2 Division euclidienne.

Théorème 3. Division euclidienne de A par B

On considère deux polynômes A et B avec en plus $B \neq 0$

Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) avec les 2 propriétés

$$A = BQ(X) + R(X) \quad ET \quad \deg(R) \underset{\text{Strict}}{<} \deg(B)$$

C'est la division euclidienne de A par B.

Démonstration :

Démonstration de l'existence. C'est en fait une révision d'algèbre linéaire.

Comme $B \neq 0$, on note $p = \deg B \geqslant 0$ et je note $n = \deg A$
Je vous laisse méditer la situation $n < p$.
On suppose $n \geqslant p$. Je considère les polynômes

$$1, X, X^2, .., X^{p-1},\ B\ ,\ XB\ ,\ X^2B(X)\ , ...,\ X^{n-p}B.$$

1. Justifier que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En décomposant A dans cette base, trouver R et Q.

Démonstration de l'unicité. C'est une application des méthodes sur le degré.

On suppose que $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ plus les conditions sur les degrés.
On a donc $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$,
En comparant $\deg(G)$ et $\deg(D)$, montrer que $Q_1 - Q_2 = 0$ et $R_2 - R_1 = 0$

2 Racine.

2.1 Racine d'un polynôme.

Théorème 4. Définition, Caractérisation.

On considère $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On a équivalence entre

(i) r est une racine du polynôme A.

(ii) $A(r) = 0$

(iii) $(X - r)$ divise A.
CàD Il existe un polynôme P tel que $A = (X - r)P$

Il est évident que $(iii) \Longrightarrow (ii)$.
On va faire plusieurs démonstrations de $(ii) \Longrightarrow (iii)$ qui sont en fait des exercices utiles.

Exercice 1. [Correction] *Démonstration de $(ii) \Longrightarrow (iii)$ avec la formule de Taylor.*
On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.

Énoncer le théorème de Taylor pour les polynômes (en particulier quelles sont le/les hypothèses du théorème).
En utilisant le théorème de Taylor, trouver P tel que $A = (X - r)P$

Exercice 2. *Démonstration de $(ii) \Longrightarrow (iii)$ avec la division euclidienne.*
On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.

En suivant la démarche du travail 8, déterminer le reste de la division euclidienne de A pas $(X-r)$.

Exercice 3. *Démonstration de* $(ii) \Longrightarrow (iii)$ *avec le principe de superposition.*
On suppose que $A(r)=0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.

Soit $k \in \{1,\dots,n\}$. Déterminer un polynôme Q_k tel que $X^k - r^k = (X-r)\,Q_r$.
En déduire qu'il existe un polynôme P tel que $A = (X-r)\,P$.

Indication : Chercher, avant de lire dans un miroir, l'indication ci-dessous :
Comme $\deg(A) \leqslant n$, on sait que $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Ainsi on a $A(X) = A(X) - A(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n} a_k r^k = \cdots$.

Exercice 4. *Démonstration de* $(ii) \Longrightarrow (iii)$ *avec l'algèbre linéaire.*
On suppose que $A(r)=0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.
On considère $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \text{tel que } P(r)=0\}$

Montrer que H est un ssev strict de $\mathbb{R}_n[X]$. Que peut-on en déduire sur $\dim(H)$?

Montrer que : $\mathscr{B} = \left[(X-r),\, X(X-r), \dots, X^{n-1}(X-r)\right]$ est une famille libre de H.
Que peut-on en déduire sur $\dim(H)$?

Déterminer $\dim(H)$ puis que $\mathscr{B}$ est une base de H.

En utilisant la base $\mathscr{B}$ montrer (iii)

2.2 Rigidités des polynômes.

Théorème 5. D'Alembert-Gauss et rigidités des polynômes.

> **D'Alembert-Gauss.** Soit A un polynôme de degré n

Alors le polynôme A admet n racines dans $\mathbb{C}$
et on a la factorisation $A = a(X-r_1)\cdots(X-r_n)$

> **Rigidités des polynômes.**

A est un polynôme
A admet une infinité de racine
$\Longrightarrow$ Alors le polynôme A est nul.

A est un polynôme de degré $\leqslant n$
A admet trop de racine, CàD $(n+1)$ ou plus
$\Longrightarrow$ Alors le polynôme A est nul.

A et B sont deux polynômes
$A(\square) = B(\square)$ pour une infinité de $\square$
$\Longrightarrow$ Alors $A(X) = B(X)$.

Application/Exemple.

Montrer que les polynômes de Chebychev sont uniques.

2.3 Multiplicité des racines.

Définition 6. Définition de la multiplicité 2 ou racine double.
Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

> On dit que : r est une racine A de multiplicité 2 Ssi $(X-r)^2$ divise A

> On dit que : r est une racine A de multiplicité **exactement** 2 Ssi

$$\text{Ssi } A = \underbrace{(X-r)^2 Q}_{\text{CàD } (X-r)^2 \text{ divise } A} \quad \text{et} \quad Q(r) \neq 0.$$

`Ainsi on a` $(X-r)^2$ `divise` A `mais` $(X-r)^3$ `ne divise pas` A

Attention les américains disent multiplicité à la place de multiplicité exacte
donc il peut y avoir confusion.

Théorème. Lorsque l'on connait la factorisation de A
alors on lit les multiplicités et c'est bon.

Exemple $A = 2(X-3)(X+2)^2$, Alors
$r = 3$ est de multiplicité 1
$r = (-2)$ est une racine de multiplicité 2

Vocabulaire
> *Lorsque r est une racine de multiplicité 0 cela signifie qu'elle n'est pas racine!!!!*
> Lorsque r est de multiplicité exact égale à 1, on dit que r est une racine simple.
> Lorsque r est de multiplicité "exact" égale à 2, on dit que r est une racine double.
> Lorsque r est de multiplicité "exact" égale à 3, on dit que r est une racine triple.

Théorème 7. Caractérisation de la multiplicité.
Multiplicité et dérivations.

Soit A un polynôme et $r \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}^*$
Lorsque r est une racine A de multiplicité (exacte) p
alors r est une racine A' de multiplicité (exacte) $p-1$. Ici A' c'est le polynôme dérive.

Application. On a équivalence entre
(i) r est une racine de multiplicité p [exact]
(ii) $(X-r)^p$ divise A [et $(X-r)^{p+1}$ ne divise pas A.]
(iii) $A(r) = A'(r) = \ldots = A^{(p-1)}(r) = 0$ [et $A^{(p)}(a) \neq 0$.]

À la recherche des racines multiples.

Soit A un polynôme et $r \in \mathbb{C}$.
On vient de voir que r est une racine multiple,
Ssi $A(r) = 0$ et $A'(r) = 0$

Ainsi on a l'équivalence

$$\left(\begin{array}{l}\text{le polynôme } A \\ \text{admet des racines multiples}\end{array}\right) \Longleftrightarrow \textit{le système} \left\{\begin{array}{l} A(x) = 0 \\ A'(x) = 0 \end{array}\right. \text{admet des solutions}$$

Application : Lorsque le système n'a pas de solution
alors les racines du polynôme sont simples (et donc 2 à 2 différentes).

3 Factorisation des Polynômes dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $r \in \mathbb{C}$. Le facteur conjugué de $(X-r)$ c'est $X-\overline{r}$)

On regroupe les facteurs conjugués, CàD $(X-r)(X-\overline{r})$

On sait que : $(X-r)(X-\overline{r}) = X^2 + X[\quad\quad] + [\quad\quad]$

Théorème 8. Théorème de Factorisation dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$.

> **Dans $\mathbb{C}$.** Soit A un polynôme à coefficient dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On suppose que $\deg A = n \geqslant 1$.

Alors on peut écrire A comme produit de facteur de degré 1 CàD
il existe $r_1, r_2, ..., r_n \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$
tel que $A = \lambda (X-r_1)(X-r_2)...(X-r_n)$
De plus il est clair que λ est le coefficient dominant de A.

> **Dans $\mathbb{R}$.** Soit A un polynôme à coefficient dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $\deg A = n \geqslant 1$.

Étape 1 : On applique le théorème précédent
ainsi on obtient une factorisation avec des racines dans $\mathbb{C}$.

Étape 2 : puis on regroupe les facteurs conjugués

Polynôme scindé : On dit que le polynôme A est scindé sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{Q}$)
Ssi les racines de A sont toutes réelles (resp. dans $\mathbb{Q}$).

4 Lien coefficient-Racine.

Définition 9. Définition des Fonctions symétriques.

Soit $n \in N^*$ et $r_1, r_2, ..., r_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Pour $k \in \{1, 2, ..n\}$, on définit les nombres σ_k

σ_k = Somme de tous les paquets de k nombres parmi $r_1, r_2, ..., r_n$

Les σ_k sont appelés les fonctions symétriques.

`Remarque` : Lorsque $r_1, r_2, ..., r_n$ sont les racines d'un polynôme A
on parle des fonctions symétriques des racines de A.

Théorème 10. Lien coefficients-racines

Soit A un polynôme non nul. Je note $n = \deg(A)$.
On peut écrire le polynôme A

> Sous forme développer, CàD avec les coefficients ainsi $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

> Sous forme factoriser, CàD avec les racines ainsi $A = a_n \prod_{k=k}^{n} (X - r_k)$

On compare les coefficients de X^0 et de X^{n-1} dans les 2 formes, on obtient

$$\sigma_1 = r_1 + r_2 + ... + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \text{ et } \sigma_n = r_1 r_2 ... r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Plus généralement, on $\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$

5 Polynômes interpolateurs de Lagrange

Théorème 11. Polynôme interpolateur de Lagrange

Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ des réels distincts, et $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ des réels quelconques.

Alors il existe un et un seul polynôme P de degré $\leqslant n$ et vérifiant $\forall\, i \in \{0, 1, ..., n\},\ \mathrm{P}(a_i) = b_i$

De plus on connait explicitement ce polynôme, c'est $\mathrm{P(X)} = \sum_{i=0}^{n} b_i\, \mathrm{L}_i(\mathrm{X})$

où L_i est le polynôme $\mathrm{L}_i(\mathrm{X}) = \dfrac{\prod_{j\neq i}(\mathrm{X} - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$

Ce polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange; on dit qu'il interpole les valeurs $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ en les noeuds $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

6 Les exercices de la banque CCP.

Autour de Divise.

Exercice 5. [Correction] On suppose que A divise B, montrer que A^2 divise $\left(A'B - AB'\right)$.

Exercice 6. [Correction] Il y a-il un argument de cohérence, CàD sans calcul, pour dire si les égalités suivante sont des division euclidienne ?

$$\underbrace{X^n + X^2 - X + 1}_{A} = \underbrace{X}_{B}\underbrace{(X^{n-1} + X)}_{Q} - \underbrace{X + 1}_{R}$$

$$\underbrace{X^n - X + 1}_{A} = \underbrace{X}_{B}\underbrace{(X^{n-1} - 1)}_{Q} + \underbrace{1}_{R}$$

$$\underbrace{X^n - X^{n-1} + 1}_{A} = \underbrace{(X-1)}_{B}\underbrace{(X^{n-1} - 1)}_{Q} + \underbrace{X}_{R}$$

Exercice 7. [Correction] Déterminer le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Méthodologie.

On déterminer le degré possible de R qui heureusement sera petit puis les coefficients.

1. $A = X^n$ et $B = (X - 42)$.
2. $A = X^n$ et $B = (X-1)(X-2)$.
3. $A = X^n$ et $B = (X-1)^2$.
4. $A = (X+1)^n - X^n - 1$ et $B = X^2 + X + 1$.

Plein de démonstration du théorème sur les racines

Théorème 12. Définition, Caractérisation.

On considère $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On a équivalence entre

(i) r est une racine du polynôme A.

(ii) $A(r) = 0$

(iii) $(X - r)$ divise A.
CàD Il existe un polynôme P tel que $A = (X - r)P$

Exercice 8. [Correction] *Démonstration de $(ii) \Longrightarrow (iii)$ avec la formule de Taylor.*
On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.

Énoncer le théorème de Taylor pour les polynômes (en particulier quelles sont le/les hypothèses du théorème).
En utilisant le théorème de Taylor, trouver P tel que $A = (X - r)P$

Exercice 9. *Démonstration de $(ii) \Longrightarrow (iii)$ avec la division euclidienne.*
On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.

En suivant la démarche du travail 8, déterminer le reste de la division euclidienne de A pas $(X - r)$.

Exercice 10. [Correction] *Démonstration de $(ii) \Longrightarrow (iii)$ avec le principe de superposition.*
On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.

1. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Déterminer un polynôme Q_k tel que $X^k - r^k = (X - r)Q_r$.
2. En déduire qu'il existe un polynôme P tel que $A = (X - r)P$.

Exercice 11. *Démonstration de $(ii) \Longrightarrow (iii)$ avec l'algèbre linéaire.*
On suppose que $A(r)=0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.
On considère $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ tel que } P(r)=0\}$

Montrer que H est un ssev strict de $\mathbb{R}_n[X]$. Que peut-on en déduire sur $\dim(H)$?

Montrer que : $\mathscr{B} = \left[(X-r), X(X-r), ..., X^{n-1}(X-r)\right]$ est une famille libre de H.

Que peut-on en déduire sur $\dim(H)$?

Déterminer $\dim(H)$ puis que $\mathscr{B}$ est une base de H.

En utilisant la base $\mathscr{B}$ montrer (iii)

Factorisation - Rigidité

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit P_n le polynôme

$$P_n = 1 - X + \frac{X(X-1)}{2} - ... + (-1)^n \frac{X(X-1)...(X-(n-1))}{n!}$$

$>$ Calculer et factoriser P_1, P_2, P_3

$>$ À votre avis, quelle est la factorisation de P_n. Démontrer le.

Exercice 13. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré $\leqslant n$.

On suppose que : $\forall\, k \in \{0,1,...,n\},\ P(k) = \dfrac{k}{k+1}$

On va calculer $P(n+1)$

On considère $Q(X) = (X+1)P(X) - X$

1. Vérifier que Q est un polynôme de degré $\leqslant (n+1)$.
2. Trouver ses racines. Écrire sa factorisation et déterminer son coefficient dominant.
3. Calculer $P(n+1)$

Exercice 14. [Correction] **À la recherche de propriétés caractéristiques des polynômes.**

Justifier qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

1. Pour tout $x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sin(x)$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R},\ P(x) = e^x$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R},\ P(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
4. Pour tout $x \in \mathbb{R},\ P(x) = |x|$

Justifier qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

5. Pour tout $z \in \mathbb{C},\ P(z) = \overline{z}$
6. Pour tout $z \in \mathbb{C},\ P(z) = |z|$

Exercice 15. [Correction] Soit P un polynôme 1-périodique CàD vérifiant $P(X+1) = P(X)$

On va montrer que P est constant égale à $P(0)$, CàD $P = P(0)$.

On considère le polynôme $A = P - P(0)$.

Vérifier que 0, 1, 2 sont des racines de A.

Trouver une infinité de racine pour A et conclure.

Multiplicité des racines

Exercice 16. [Correction]

1. Soit A un polynôme de degré 2 et r une racine de A.
   Donner une condition pour que r soit une racine double.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $U_n = (X^2-1)^n$
   Montrer que 1 est une racine du polynôme U_n et déterminer sa multiplicité.

Exercice 17. *Applications directes du théorème.*

1. On considère le polynôme $P = aX^2 + bX + c$
   Montrer que le système $[P(X) = 0 \ et \ P'(X) = 0]$ admet des solutions Ssi $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
   Est-cohérent avec notre Kulture commune ?
2. On considère le polynôme $P = X^n - 1$
   Sans calculer les racines, montrer que les racines de P sont simples

Exercice 18. D'après le banque CCP.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Exercice 19. D'après le banque CCP.

Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20. Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants

1. $X^2 - 1$ et $X^2 + 1$.
2. $X^3 - 1$ et $X^3 + 1$.
3. $X^4 - 1$ et $X^4 + 1$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^n - 1$.

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $A = (X+1)^n - 1$.

1. Étude de A.
   (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme A et A n'a pas de racine multiple.
   (b) Déterminer les racines de A.
2. Étude de B.
   (a) Démontrer qu'il existe un polynôme B tel que $A = XB$.
   Déterminer le degré et le coefficient dominant et le terme constant du polynôme B
   (b) Déterminer les racines de B.

Lien coefficients/Racines

Exercice 22. Deux exemples concrets.

1. **Lorsque** $\deg(A)=2$**.** On considère le polynôme
$$A=a(X-r)(X-r')=aX^2+bX+c$$
Développer $a(X-r)(X-r')$. En déduire $\sigma_1=r+r'$ et $\sigma_2=rr'$ en fonction de a,b,c.
2. **Lorsque** $\deg(A)=3$**.** On considère le polynôme
$$A=a(X-r)(X-r')(X-r'')=aX^3+bX^2+cX+d$$
Développer $a(X-r)(X-r')(X-r'')$. En déduire σ_1, σ_2 et σ_3 en fonction de a,b,c,d.

Les exercices de la banque CCP.

Exercice 23. [Correction]

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n=1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n\in\mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n=(z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 24. [Correction]

1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $a\in\mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor,
   la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1,(X-a),(X-a)^2,\cdots,(X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r\in\mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r
   si et seulement si $P^{(r)}(a)\neq 0$ et $\forall k\in[\![0,r-1]\!]$, $P^{(k)}(a)=0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P=X^5+aX^2+bX$
   et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 25. [Correction] Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Soit le polynôme $P=aX^{n+1}+bX^n+1$.

1. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine au moins double de P.
2. Dans ce cas, vérifier que le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) On suppose que $A(r)=0$ et que $\deg(A)\leqslant n$.

Comme A est un polynôme et $\deg(A)\leqslant n$, on peut la formule de Taylor en r à l'ordre n, ainsi

$$\begin{aligned}A &= \underbrace{A(r)}_{=0} + A'(r)(X-r)+\cdots+A^{(n)}(r)\frac{(X-r)^n}{n!}\\ &= (X-r)\left[A'(r)+\cdots+A^{(n)}(r)\frac{(X-r)^{n-1}}{n!}\right]\end{aligned}$$

Donc $(X-r)$ se factorise. Yes !

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

Comme A divise B, il existe un polynôme Q tel que $B=AQ$, ainsi on a

$$A'B-AB' = A'[AQ]-A[AQ]' = A'AQ-A[A'Q+AQ'] = -A^2Q'$$

Donc on a bien A^2 divise $\left(A'B-AB'\right)$.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

On compare le degré de B et de R, ainsi on a : Non, Oui, Non.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

Rappel : Déterminer un poly c'est : trouver son degré puis ses coefficients.

1. On a $\deg(R)<\deg(B)=1$ donc $\deg(R)\leqslant 0$, CàD R est un polynôme constant CàD $R=a$.
   Ainsi on a : $X^n=(X-42)Q+a$.
   $>$ J'applique en $X=42$

   Conclusion : $R=42^n$ et on a $X^n=(X-42)Q(X)+42^n$

2. C'est un Copier-Collé.
   On a $\deg(R)<\deg(B)=2$ donc $\deg(R)\leqslant 1$, CàD R est un polynôme constant CàD $R=aX+b$.
   Ainsi on a : $X^n=(X-1)(X-2)Q+aX+b$.
   $>$ J'applique en $X=1$ et en $X=2$.

   On résout le système, c'est bon mais lourd ! ! !

3. C'est un Copier-Collé.
   On a $\deg(R)<\deg(B)=2$ donc $\deg(R)\leqslant 1$, CàD R est un polynôme constant CàD $R=aX+b$.
   Ainsi on a : $X^n=(X-1)^2Q+aX+b$.
   $>$ J'applique en $X=1$ et on dérive puis on applique à nouveau en $X=1$

   On résout le système, c'est bon mais lourd ! ! !

4. C'est un Copier-Collé.
   On a $\deg(R)<\deg(B)=2$ donc $\deg(R)\leqslant 1$, CàD R est un polynôme constant CàD $R=aX+b$.
   Ainsi on a : $(X+1)^n-X^n-1=(X^2+X+1)^2Q+aX+b$.
   $>$ Comme les 2 racines/zéros de X^2+X+1 sont $X=j$ et en $X=j^2$.
   J'applique en $X=j$ et en $X=j^2$, ainsi

   $$\begin{aligned}aj+b &= (j+1)^n-j^n-1=(-j^2)^n-j^n-1\\ aj^2+b &= (j^2+1)^n-(j^2)^n-1=(-j)^n-(j^2)^n-1\end{aligned}$$

   On résout le système, c'est bon mais lourd ! ! !

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) On suppose que $A(r)=0$ et que $\deg(A)\leqslant n$.

Comme A est un polynôme et $\deg(A)\leqslant n$, on peut la formule de Taylor en r à l'ordre n, ainsi

$$\begin{aligned}A &= \underbrace{A(r)}_{=0} + A'(r)(X-r)+\cdots+A^{(n)}(r)\frac{(X-r)^n}{n!}\\ &= (X-r)\left[A'(r)+\cdots+A^{(n)}(r)\frac{(X-r)^{n-1}}{n!}\right]\end{aligned}$$

Donc $(X-r)$ se factorise. Yes !

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. Soit $k \in \{1,...,n\}$. Déterminer un polynôme Q_k tel que $X^k - r^k = (X-r)\,Q_r$.

   Soit $k \in \{1,...,n\}$. on a

$$X^k - r^k = (X-r)\left[X^{k-1} + r\,X^{k-2} + r^2\,X^{k-3} + \cdots + r^{k-2}\,X + r^{k-1}\right]$$

   Donc $Q_r = X^{k-1} + r\,X^{k-2} + r^2\,X^{k-3} + \cdots + r^{k-2}\,X + r^{k-1}$ convient

2. En déduire qu'il existe un polynôme P tel que $A = (X-r)\,P$.

   Comme P un polynôme $\neq \mathscr{O}$ de degré $\alpha \leqslant n$, ainsi on a peut écrire $P = \sum_0^\alpha a_k X^k$

   De plus on sait $P(r) = 0$. On a maintenant

$$\begin{aligned} P(X) = P(X) - P(0) &= \sum_0^\alpha a_k X^k - \sum_0^\alpha a_k r^k \\ &= \sum_0^\alpha a_k \left[X^k - r^k\right] \\ &= \underbrace{O}_{k=0} + \sum_0^\alpha a_k\,(X-r)\,Q_r \\ &= (X-r) \underbrace{\sum_0^\alpha a_k\,Q_r}_{\text{Ceci est un poly}} \end{aligned}$$

   Conclusion : $(X-r)$ se factorise YES

Solution de l'exercice 13 (Énoncé)

1. Vérifier que Q est un polynôme de degré $\leqslant (n+1)$.

   Comme P est un polynôme de degré $\leqslant n$. C'est évident

2. Trouver ses racines. Écrire sa factorisation et déterminer son coefficient dominant.

   Pour $k \in \{0,1,...,n\}$, on a $Q(k) = (k+1)P(k) - k = (k+1)\dfrac{k}{k+1} - k = 0$

   On a trouvé $(n+1)$ racines et le polynôme Q est de degré $\leqslant n+1$,

   Ainsi on a $Q(X) = (X+1)P(X) - X = \lambda \prod_{k=0}^{n} (X-k)$ avec λ le coefficient dominant

   J'applique l'égalité en $X = -1$, ainsi $1 = \lambda \prod_{k=0}^{n} (-1-k) = \lambda\,(-1)^{n+1}(n+1)!$

   Conclusion : $\lambda = \dfrac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!}$ et $Q(X) = (X+1)P(X) - X = \dfrac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (X-k)$

3. Calculer $P(n+1)$

   On a $Q(n+1) = (n+2)P(n+1) - (n+1) = \dfrac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} ((n+1)-k) = \dfrac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!}(n+1)! = \dfrac{1}{(-1)^{n+1}} = (-1)^{n+1}$

   Conclusion : $P(n+1) = \dfrac{(-1)^{n+1} + (n+1)}{n+2}$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

Voici des arguments possibles

> Un polynôme admet une infinité de racine

Donc par contraposée, Si la fonction h admet une infinité de racines/zéros *alors h n'est pas un polynôme.*

> Si h est un polynôme, alors quand on dérive suffisamment on tombe sur la fonction nulle

Donc par contraposée, Si $h^{(n)}$ n'est jamais la fonction nulle *alors h n'est pas un polynôme.*

> Si h est un polynôme, alors en $\pm\infty$, on a $h(x) \sim ax^\alpha$ et donc $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \ell \neq 0$.

Donc par contraposée, Si $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$ ou $h(x) \underset{x\to\infty}{\sim} Moche$ *alors h n'est pas un polynôme.*

> Si h est un polynôme, alors la fonction h est $\mathscr{C}^\infty$

Donc par contraposée, Si la fonction h n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ *alors h n'est pas un polynôme.*

> 2 polynômes qui coïncident sur une infinité de $\square$ sont égaux.

Donc par un RA si h coïncide avec P_1 sur un domaine et avec P_2 sur un autre domaine *alors h n'est pas un polynôme.*

On considère la fonction h définie par $z\in\mathbb{C},\ h(z)=\overline{z}$

> $\forall x\in\mathbb{R}$, on a $h(x)=\overline{x}=x$. Donc $h=X$ sur $\mathbb{R}$

> $\forall x\in i\mathbb{R}$, on a $h(x)=\overline{x}=-x$. Donc $h=-X$ sur $i\mathbb{R}$

À cause du dernier argument, h n'est pas un polynôme ! ! !

On considère la fonction h définie par $z\in\mathbb{C},\ h(z)=|z|$

> $\forall x\in\mathbb{R}_+$, on a $h(x)=|x|=x$. Donc $h=X$ sur $\mathbb{R}_+$

> $\forall x\in i\mathbb{R}_-$, on a $h(x)=|x|=-x$. Donc $h=-X$ sur $\mathbb{R}_1$

> Et même Bonus : $\forall x\in\mathbb{U}$, on a $h(x)=1$. Donc $h=1=X^0$ sur $\mathbb{U}$

À cause du dernier argument, h n'est pas un polynôme ! ! !

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

Comme $A(0)=0$, 0 est bien une racine de A.
Plus généralement, pour tout n, on a

$$A(n+1)=P(n+1)-P(0)=\underbrace{P(n+1)-P(n)}_{=0\ car\ 1\text{-}périodique}+P(n)-P(0)=A(n)$$

Ainsi on a $A(n)=A(n-1)=\cdots=A(1)=A(0)$

Conclusion : le polynôme A a une infinité de racines donc A est le polynôme nul
et enfin $A=0\iff P-P(0)=0\iff P=P(0)$

Solution de l'exercice 16 (Énoncé)

1. c'est de la culture ! ! On sait
   Lorsque $\Delta\neq 0$ les racines sont distinctes, CàD elles sont simples
   et on n'a la factorisation : $A=a(X-r)(X-r')$

   Lorsque $\Delta=0$ les racines sont confondus, CàD l'unique racine est double
   et on n'a la factorisation : $A=a(X-r)^2$
2. On a $U_n=(X^2-1)^n=(x-1)^n(x-1)^n$.
   Comme on a la factorisation, on connait les multiplicités

Solution de l'exercice 23 (Énoncé)

Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

Soit z un complexe $\neq 0$. Alors il existe un couple r,θ tel que $z=re^{i\theta}$
Alors θ est un argument du complexe z

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n=1$ et préciser leur nombre.

La démonstration, que je conseille, est plutôt originale
Voir cours sur les racines n-ième

En déduire, pour $n\in\mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n=(z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

On résout $(z+\mathrm{i})^n=(z-\mathrm{i})^n\iff\begin{cases}U^n=1\\ \dfrac{z+i}{z-i}=U\end{cases}$
Pour démontrer que les racines sont des nombres réels, on factorise l'argument moitié.

Solution de l'exercice 24 (Énoncé)

1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $a\in\mathbb{R}$.
   (a) On note $deg(P)=\alpha$

$$\begin{aligned}P(X)=P(a+h)&=P(a)+P'(a)h+\cdots+P(n)(a)\frac{h^\alpha}{\alpha!}\\&=P(a)+P'(a)(X-a)+\cdots+P(n)(a)\frac{(X-a)^\alpha}{\alpha!}\end{aligned}$$

   (b) C'est dans le cours
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P=X^5+aX^2+bX$

   On cherche a et b tel que $P(1)=0$ et $P'(1)=0$ puis on factorise en remarquant que X se factorise aussi.

Solution de l'exercice 25 (Énoncé)

1. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine au moins double de P.

   On cherche deux réels a et b tel que $P(1)=0$ et $P'(1)=0$
   On trouve $a=n$ et $b=-n-1$

2. Dans ce cas, vérifier que le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$.

   Méthode 1. On fait par récurrence sur n,

   $$H<n>: nX^{n+1}-(n+1)X^n+1=(X-1)^2\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$$

   Méthode 2. On calcule directement $(X^2-2X+1)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$ avec un télescopage (méthode de la clef)