

Vous devez faire au choix : Exercice 1-2 OU Exercice 2-3

Attention l'exercice 3 est plus difficile.

Et le problème A OU le problème B

Le problème A est "classique" MAIS pas si simple

Le problème B est plus technique, plus abstrait et plus difficile.

Vous pouvez aussi choisir de faire :

l'exercice 3 et les problèmes B et C.

La principale difficulté sera le longueur et l'abstraction

Exercice 1. [Correction] Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3.$$

1. On suppose que la fonction est affine, CàD qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$.

$$\text{Calculer } f \circ f(x) \text{ et montrer que : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{+1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1} \text{ ou } f(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\frac{-1}{\sqrt{2}} + 1}$$

On suppose maintenant que f est quelconque, $\mathcal{C}^1$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

Calculer u_n en fonction de u_0 et n .

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 6.

3. Étude de f'

(a) Calculer $f \circ (f \circ f)(x)$ et $(f \circ f) \circ f(x)$.

(b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(\frac{x}{2} + 3) = f'(x)$

(c) En utilisant la suite $(f(u_n))$, montrer que la fonction f' est constante égale à $f'(6)$.

4. Déterminer les fonctions f .

Exercice 2. [Correction] Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit ϕ la fonction définie par l'expression

$$\phi(x) = \int_{-x}^x f(t) dt - x[f(x) + f(-x)]$$

1. (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ de définition de la fonction ϕ
- (b) Justifier que la fonction ϕ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer ϕ'
2. Une majoration.

(a) Montrer qu'il existe M tel que $\forall u \in [-1, 1], |f''(u)| \leq M$

(b) En déduire une majoration de $|f'(t) - f'(-t)|$

puis que : $\forall t \in [0, 1], |\phi'(t)| \leq 2Mt^2$

3. En déduire que : $|\phi(1)| \leq \frac{2}{3}M$

$$\text{Indication : On notera que } |\phi(1)| = \left| \phi(1) - \underbrace{\phi(0)}_{=0} \right|$$

Exercice 3. [Correction] On considère l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = \frac{1}{2} \sin [x^2 - y(x)] \quad (E)$$

Soit une fonction f définie, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 0$ et qui est solution de l'équation différentielle (E).

En dérivant et évaluant l'équation différentielle (E), on obtient facilement (**et ici on l'admettra**) que

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 0 \text{ et } f'''(0) = 1.$$

1. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]0, \eta[$, alors $0 < f(x) < x^2$

2. On suppose qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = x_0^2$ et on considère

$$\mathcal{A} = \{x > 0 \text{ tel que } f(x) = x^2\} \quad \text{et} \quad a = \inf \mathcal{A}.$$

(a) Justifier que $a = \inf \mathcal{A}$ existe et que $a \geq \eta > 0$.

Rappel : le nombre η a été définie à la question précédente.

(b) Montrer que $f(a) = a^2$.

(c) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall x \in [a - \lambda, a[$, $f(x) > x^2$.

(d) En déduire qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que $f(c) = c^2$

(e) Trouver une absurdité.

3. Que peut-on conclure ?

Exercice 4. Problème A

Partie A

Soit f , une fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

On ne cherchera pas déterminer la fonction f .

1. Déterminer $f'(0)$ et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)$.
3. Comme la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$, on sait grâce à Taylor-Young que pour tout n , la fonction f admet un DL_n en 0. Plus précisément

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \text{ et en plus on a } a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

- (a) À l'aide de la question Q2, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = \frac{(-4)^k \cdot k!}{(2k+1)!}$
- (b) Obtenir également l'expression des termes a_{2k} à l'aide de $f(0)$ (k entier naturel).

Partie B

On considère la fonction $D : x \mapsto D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

1. Justifier le fait que la fonction D est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction D est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.
2. Étudier la parité de D .
3. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, xe^{-x^2} \leq D(x) \leq x$.
4. (a) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$.
- (b) Soit la fonction $h : t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t^2}$.

Montrer que h est croissante sur $[1, +\infty[$.

En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[, \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leq h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$

(c) Montrer que : $\int_1^x e^{t^2} dt \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$

(d) En déduire que $D(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

Partie C

On admet que $a = D(1) > 0$

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A, D(x) \leq a$.
2. Démontrer que D admet et atteint son maximum en (au moins) un point b de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que ce maximum est égal à $\frac{1}{2b}$.
4. En déduire l'unicité du point où le maximum est atteint.

Partie D

1. Déterminer à l'aide de la fonction D l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.
2. Montrer l'existence d'une unique solution impaire.

Exercice 5. [Correction] Problème B

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de I à valeurs dans $\mathbb{R}$,

On dit que la fonction f est Absolument Monotone sur I Ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$.

Exemple : La fonction $\exp$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp^{(n)}(x) = e^x \geq 0$

Donc la fonction $\exp$ est Absolument Monotone sur $\mathbb{R}$

1. Généralités et Exemples.

(a) Soient f et g deux fonctions Absolument Monotone sur I .

Montrer que les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont Absolument Monotone sur I .

(b) Soit la fonction $f : x \mapsto -\ln(1 - x)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$, calculer $f^{(n)}(x)$. En déduire que f est Absolument Monotone sur $[0, 1[$.

(c) À partir du lien entre $\tan'$ et $\tan$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$

En déduire que la fonction $\tan$ est Absolument Monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. Prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0^+ .

On suppose dans cette question que la fonction f est Absolument Monotone sur $]0, b[$ avec $b > 0$.

(a) Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 et $f(0) \geq 0$.

(b) Montrer que le prolongement est $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) \geq 0$.

(c) Un tel prolongement est-il possible en b ?

3. Égalité de Taylor avec reste intégrale.

Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, b[$ avec $b > 0$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, b[, f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

4. Série de Taylor.

On considère dans cette question que la fonction f est Absolument Monotone sur $[0, b[$ avec $b > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, b[$, on considère :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \text{ et } R_n(x) = \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

La question Q3. assure que $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$

(a) Montrer que la suite $(S_n(x))$ converge.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 < x < y < b$.

i. Montrer que : $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 f^{(n+1)}(xu) \frac{(1-u)^n}{n!} du$

ii. En déduire que : $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$

iii. Montrer que la suite $(S_n(x))$ converge vers $f(x)$

Exercice 6. [Correction] Problème C Méthode de Newton

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, telle que :

- > $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$
- > $f' < 0$ sur $[a, b]$
- > $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

1. Justifier qu'il existe un unique $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
2. Soit $u \in [a, b]$.

Donner l'équation de la droite tangente au graphe de f en u ,
et déterminer, en fonction de u , l'abscisse de son point d'intersection avec l'axe des abscisses.

Dans la suite, on considère

$$> \text{La fonction } g : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}.$$

> le réel $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > 0$

> La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dont le premier terme est x_0 et telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

3. Démontrer que la suite (x_n) est croissante et converge vers c .
4. Justifier que $m = \min_{t \in [a, b]} |f'(t)|$ et $M = \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|$ sont bien définis et strictement positifs.

5. Montrer que pour tout $x \in [a, c]$, $f(c) = f(x) + (c - x)f'(x) + \int_x^c (c - t)f''(t) dt$

$$\text{En déduire que pour tout } n \in \mathbf{N}, |x_{n+1} - c| \leq \frac{M}{2m} (x_n - c)^2.$$

6. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $|x_{n_0} - c| \leq \frac{m}{M}$ et prouver alors que pour tout $n \geq n_0$,

$$|x_n - c| \leq \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^{n-n_0}}}$$

7. Montrer alors que pour tout $q \in]0, 1[$, $|x_n - c| \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(q^n)$.

Moralité : la suite (x_n) converge vers c plus vite que n'importe quelle suite géométrique. Donc très très vite !

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Montrer que : $f(x) = \frac{+1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}$ ou $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\frac{-1}{\sqrt{2}}+1}$

Comme $f(x) = ax + b$, on a

$$[f \circ f](x) = \frac{x}{2} + 3$$

$$\Leftrightarrow a(ax + b) + b = \frac{x}{2} + 3$$

$$\Leftrightarrow a^2x + ba + b = \frac{x}{2} + 3$$

$$\Leftrightarrow \text{Est ce que ce} \Leftrightarrow \text{est vraiment clair}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} \\ b(a+1) = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \frac{3}{a+1} \end{cases}$$

Conclusion : Il y a donc deux fonctions qui conviennent $f(x) = \frac{+1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}$ ou $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\frac{-1}{\sqrt{2}}+1}$

2. Calculer u_n en fonction de u_0 et n .

C'est une suite arithmético-geo.

$$\text{On trouve : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 6 + H_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 6.

$$\text{On a : } u_n = 6 + H_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 6 + 0 = 6$$

3. Etude de f'

- (a) Calculer $f \circ (f \circ f)(x)$ et $(f \circ f) \circ f(x)$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } [f \circ (f \circ f)](x) = f((f \circ f)(x)) = f\left(\frac{x}{2} + 3\right)$$

$$[(f \circ f) \circ f](x) = (f \circ f)(f(x)) = \frac{f(x)}{2} + 3$$

$$\text{En déduire que : } \forall x \in \mathbb{R}, f'\left(\frac{x}{2} + 3\right) = f'(x)$$

$$\text{On sait que : } \forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{f(x)}{2}$$

On dérive l'égalité,

$$\begin{aligned} \text{On a donc } \left[f\left(\frac{x}{2} + 3\right)\right]' &= \left[\frac{f(x)}{2} + 3\right]' \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{1}{2}f'(x) \text{ Fini} \end{aligned}$$

- (b) En utilisant la suite $(f(u_n))$, montrer que la fonction f' est constante égale à $f'(6)$.

D'une part.

$$\text{Comme } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 6 \text{ et } f' \text{ est continue, on a donc } f'(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(6)$$

D'autre part.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } f'(u_{n+1}) = f'\left(\frac{1}{2}u_n + 3\right) = f'(u_n)$$

La suite $(f'(u_n))$ est donc une suite constante égale à $f'(u_0)$
donc elle converge vers $f'(u_0) = f'(x)$

Conclusion : Par unicité de la limite, on a $f'(x) = f'(6)$

Le raisonnement est valide pour tout x DONC la fonction f' est constante.

4. Déterminer les fonctions f .

Comme f' est constante, on a $\forall x f'(x) = a$ et en primitivant $f(x) = ax + b$

Donc forcément f est affine.

Conclusion : Les fonctions recherchées sont forcément affines
Et la question Q1 donne les seules solutions

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) 1. (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ de définition de la fonction ϕ

Le nombre $\phi(x)$ se calcule Ssi $\int_{-x}^x f(t) dt$ se calcule

Ssi la fonction f est continue sur $[-x, x]$

Ssi $[-x, x] \subset [-1, 1]$

Conclusion : La fonction ϕ est définie sur $\mathcal{D} = [-1, 1]$

(b) Justifier que la fonction ϕ est définie et dérivable sur $[-1, 1]$ et calculer ϕ'

Comme f est C^0 sur $[-1, 1]$,

Alors la fonction $x \mapsto \int_{-x}^x f(t) dt$ est dérivable

Ainsi ϕ est dérivable

On a $\forall x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \left(\int_{-x}^x f(t) dt - x[f(x) + f(-x)] \right)' \\ &= (\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}(-x) - x[f(x) + f(-x)])' \\ &= f(x) - (-1)f(-x) - [f(x) + f(-x)] - x[f'(x) + (-1)f'(-x)] \\ &= -x[f'(x) - f'(-x)]\end{aligned}$$

2. (a) Montrer qu'il existe M tel que $\forall u \in [-1, 1], |f''(u)| \leq M$

La fonction f'' est continue sur le segment $[-1, 1]$

(b) En déduire une majoration de $|f'(t) - f'(-t)|$

La fonction f' est dérivable et $\forall u \in [-1, 1], |f''(u)| \leq M$ donc

d'après le TAF à la fonction f' sur $[-1, 1]$

Ainsi $\forall x, x' \in [-1, 1], |f'(x) - f'(x')| \leq M|x - x'|$

On applique l'inégalité avec $x' = -x \in [-1, 1]$,

ainsi $\forall x \in [-1, 1], |f'(x) - f'(-x)| \leq M|x - (-x)| = 2M|x|$

puis que : $\forall t \in [0, 1], |\phi'(t)| \leq 2Mt^2$

$$\begin{aligned}\text{On a } \forall t \in [0, 1], |\phi'(t)| &= |t| \cdot |f'(t) - f'(-t)| \\ &\leq |t| \cdot 2M|t| \\ &\leq 2Mt^2\end{aligned}$$

3. En déduire que : $|\phi(1)| \leq \frac{2}{3}M$

On cherche à obtenir une majoration de $|\phi'(1)|$. Comme $\phi(0) = 0$, on a

$$\begin{aligned}|\phi(1)| &= |\phi(1) - \phi(0)| = \left| \int_0^1 \phi'(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |\phi'(x)| dx \leq \int_0^1 2Mx^2 dx = \frac{2M}{3}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]0, \eta[$, alors $0 < f(x) < x^2$

> La fonction f est $\mathcal{C}^3$ donc Taylor-Young assure que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0 + 0x + 0x^2 + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

> On a $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$ et $\frac{x^3}{6} > 0$ en 0^+

donc la fonction f est > 0 au voisinage de 0^+

> On a : $Q(x) = f(x)/x = \frac{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

On applique la définition de $Q(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ avec $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, ainsi

2. On suppose qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = x_0^2$ et on considère

$$\mathcal{A} = \{x > 0 \text{ tel que } f(x) = x^2\} \quad \text{et} \quad a = \inf \mathcal{A}.$$

- (a) Justifier que $a = \inf \mathcal{A}$ existe et que $a \geq \eta > 0$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ est non vide (car $x_0 \in \mathcal{A}$) et minorée par η .

- (b) Montrer que $f(a) = a^2$.

On sait que $a = \inf \mathcal{A}$ est adhérent à $\mathcal{A}$, ainsi

- (c) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall x \in [a - \lambda, a[$, $f(x) > x^2$.

On considère $Q(x) = \frac{f(x)}{x^2}$

> On a $Q(x) = \frac{f(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{f(a)}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

Donc la seule limite ne permet pas de conclure que le candidat quotient est > 1 au voisinage de a^-

Il faut voir plus loin et faire le DL

> On a $Q(x) = \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(a+h)}{x(a+h)^2} = \frac{f(a) + f'(a)h + o(h)}{a^2 + 2ah + h^2}$

De plus comme $f'(a) = \frac{1}{2} \sin(a^2 - f(a)) = \frac{1}{2} \sin(a^2 - a^2) = 0$, ainsi

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(a+h)}{x(a+h)^2} = \frac{a^2 + o(h)}{a^2 + 2ah + h^2} \\ &= \frac{a^2 + o(h)}{a^2(1 + \square)} \\ &= (1 + o(h))(1 - \square + o(\square)) \end{aligned}$$

$$\text{De plus } \square = \frac{2h}{a} + \frac{h^2}{a^2} \text{ et } o(\square) = o(h)$$

$$= (1 + o(h)) \left(1 - \left[\frac{2h}{a} + \frac{h^2}{a^2} \right] + o(h) \right)$$

$$= (1 + o(h)) \left(1 - \frac{2h}{a} + o(h) \right)$$

$$= 1 - \frac{2h}{a} + o(h)$$

Conclusion $\lim_{x \rightarrow 1^-} Q(x) = 1^+$ et il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall x \in [a - \lambda, a[$, $f(x) > x^2$.

- (d) En déduire qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que $f(c) = c^2$

La fonction $h : x \mapsto f(x) - x^2$ est continue et < 0 en 0^+ et > 0 en a^-

Donc d'après le TVI sur $[0 + \eta, a - \lambda]$, il existe $c \in]0, a[$ tel que $f(c) = c^2$

- (e) Trouver une absurdité.

On vient de construire $c \in \mathcal{A}$ et $c < a$. C'est absurde car $a = \inf(\mathcal{A})$ minore $\mathcal{A}$!!!

3. Que peut-on conclure ?

L'hypothèse "il existe $x_0 \dots$ " est fautive donc x_0 n'existe pas et à cause du TVI,

on a démontré : $\forall x > 0$, $f(x) < x^2$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de I à valeurs dans $\mathbb{R}$,

On dit que la fonction f est Absolument Monotone sur I Ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$.

Exemple : La fonction $\exp$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp^{(n)}(x) = e^x \geq 0$

Donc la fonction $\exp$ est Absolument Monotone sur $\mathbb{R}$

1. Généralités et Exemples.

(a) Montrer que les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont Absolument Monotone sur I .

On a facilement que : $\forall x \in I, (f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0 + 0$

$$\text{et } (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) + g^{(n-k)}(x) \geq \sum 0$$

(b) Soit la fonction $f : x \mapsto -\ln(1-x)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$, calculer $f^{(n)}(x)$. En déduire que f est Absolument Monotone sur $[0, 1[$.

Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $f(x) = -\ln(1-x) \geq 0$ car $x \in [0, 1[\implies (1-x) \in]-1, 0]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$, on a $f'(x) = \frac{1}{1-x} \geq 0$ et $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \geq 0$

(c) À partir du lien entre $\tan'$ et $\tan$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$

On sait que : $\tan' = 1 + \tan^2$. On dérive n fois cette égalité

En déduire que la fonction $\tan$ est Absolument Monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On démontre que avec une récurrence **FORTE** : $H_{<n>} : \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \tan^{(n)}(x) \geq 0$

2. Prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0^+ .

On suppose dans cette question que la fonction f est Absolument Monotone sur $]0, b[$ avec $b > 0$.

(a) Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 et $f(0) \geq 0$.

La fonction f est croissante et minorée par 0 au voisinage de 0^+

donc d'après le théorème de la limite monotone, on a sait que la fonction f admet une limite $\ell \geq 0$ quand $x \rightarrow 0^+$

(b) Montrer que le prolongement est $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) \geq 0$.

Même argument que ci-dessus.

(c) Un tel prolongement est-il possible en b ?

Non, la fonction tangente est un contre-exemple.

3. Égalité de Taylor avec reste intégrale.

On pourra admettre l'égalité ci-dessous qui est programme
mais que l'on verra en fin d'année seulement

Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, b[$ avec $b > 0$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, b[, f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

4. Série de Taylor.

On considère dans cette question que la fonction f est Absolument Monotone sur $[0, b[$ avec $b > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, b[$, on considère

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{et} \quad R_n(x) = \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

La question précédente Q3. assure que $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$

(a) Montrer que la suite $(S_n(x))$ converge.

On a $S_{n+1} - S_n = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} \geq 0$ car x et $f^{(n+1)}(0)$ sont positifs

Donc la suite $(S_n(x))$ est croissante.

De plus $R_n(x) = \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \geq 0$ car $x > 0$ et $f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \geq 0$ sur $[0, x]$

$$\text{Conclusion : } S_n(x) = f(x) - R_n(x) \leq f(x)$$

la suite $(S_n(x))$ est croissante et majorée par $f(x)$ donc elle converge.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 < x < y < b$.

i. Montrer que : $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 f^{(n+1)}(xu) \frac{(1-u)^n}{n!} dt$

On fait le changement de variable $t = xu$

ii. En déduire que : $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$

On a déjà justifier $R_n(x) \geq 0$

$$R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 f^{(n+1)}(xu) \frac{(1-u)^n}{n!} dt = \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} y^{n+1} \int_0^1 f^{(n+1)}(xu) \frac{(1-u)^n}{n!} dt$$

Or $f^{(n+1)}$ est croissante et $x < y$ donc $f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(yu)$

$$\leq \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} y^{n+1} \int_0^1 f^{(n+1)}(yu) \frac{(1-u)^n}{n!} dt$$

$$\leq \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} R_n(y)$$

$$\leq \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} f(y) \text{ car } f(x) = S_n(x) + R_n(x) \geq 0 + R_n(x)$$

iii. Montrer que la suite $(S_n(x))$ converge vers $f(x)$

Le théorème des gendarme assure que $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$\text{Conclusion : } S_n(x) = f(x) - R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. Justifier qu'il existe un unique $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

La fonction f est continue et strictement dé-croissante

Ainsi elle réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$

Comme $0 \in [f(b), f(a)]$, l'équation $f(X) = 0$ admet une unique solution, noté $c \in [a, b]$

Enfin comme $f(a) \neq f(c) = 0$ et $f(b) \neq f(c) = 0$, on a bien $c \in]a, b[$

2. Soit $u \in [a, b]$.

Donner l'équation de la droite tangente au graphe de f en u ,

On sait que l'équation de la droite tangente au graphe de f en u

a pour équation : $y = f(u) + f'(u)(x - u)$

et déterminer, en fonction de u , l'abscisse de son point d'intersection avec l'axe des abscisses.

L'abscisse de son point d'intersection avec l'axe des abscisses vaut : $0 = f(u) + f'(u)(x - u) \iff x = u - \frac{f(u)}{f'(u)}$

Dans la suite, on considère

> La fonction $g : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$.

> le réel $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > 0$

> La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dont le premier terme est x_0 et telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

3. Démontrer que la suite (x_n) est croissante et converge vers c .

> La fonction g est dérivable et $\forall x \in [a, b]$, $g'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$

$$= \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

Le signe de f est connu voir Q1 ;

Conclusion : La fonction g est croissante sur $[a, c]$ et dé-croissante sur $[c, b]$

> On montre maintenant par récurrence $H_{<n>} : a \leq x_n \leq x_{n+1} \leq c$

Initialisation avec $n = 0$

Comme $x_0 \in]a, b[$ et $f(x_0) > 0$, donc $a \leq x_0 \leq c$

De plus g est croissante sur $[a, c]$, donc $g(a) \leq x_1 = g(x_0) \leq \underbrace{g(c)}_{=c}$

Enfin $x_1 - x_0 = \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

C'est > 0 car $f'(x_0) < 0$ par hypothèse et $f(x_0) > 0$ car $x_0 \in [a, c]$

Conclusion : On a bien $a \leq x_0 \leq x_1 \leq c$, CàD $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité. On suppose $H_{<n>}$

Comme g est croissante sur $[a, c]$ et $a \leq x_n \leq x_{n+1} \leq c$

Ainsi $a \leq g(a) \leq \underbrace{g(x_n)}_{=x_{n+1}} \leq \underbrace{g(x_{n+1})}_{=x_{n+2}} \leq \underbrace{g(c)}_{=c}$

Donc $H_{<n+1>}$ est vraie

> La suite (x_n) est croissante et majorée par c donc elle converge vers $\ell \leq c$

De plus c'est une suite récurrente $x_{n+1} = g(x_n)$ et g est continue,

donc $\ell = g(\ell) \iff \ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} \iff f(\ell) = 0 \iff \ell = c$

Conclusion : la suite (x_n) est croissante et converge vers c .

4. Justifier que $m = \min_{t \in [a, b]} |f'(t)|$ est définie et strictement positif.

$m = \min_{t \in [a, b]} |f'(t)|$ est bien définie et strictement positif

CAR la fonction $t \mapsto |f'(t)|$ est continue sur le segment $[a, b]$ DONC bornée et atteint ses bornes.

Justifier que $M = \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|$ est définie et strictement positif.

$M = \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|$ est défini CAR la fonction $t \mapsto |f''(t)|$ est continue sur le segment $[a, b]$ DONC bornée.
et strictement positif ?

En fait il n'y pas d'obligation !!

MAIS si $M = 0$ alors $f'' = 0$ donc f est affine et cette situation n'est pas très intéressante car $x_1 = c$ et la suite (x_n) est constante égale à c !!!

5. Montrer que pour tout $x \in [a, c]$, $f(c) = f(x) + (c-x)f'(x) + \int_x^c (c-t)f''(t) dt$

On fait une IPP à partir de $\int_x^c (c-t)f''(t) dt$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - c| \leq \frac{M}{2m} (x_n - c)^2$.

On sait (voir Q3) que $x_n \in [a, c]$. On applique l'égalité avec $x_n \in [a, c]$, ainsi

$$\underbrace{f(c)}_{=0} = f(x_n) + (c-x_n)f'(x_n) + \int_{x_n}^c (c-t)f''(t) dt$$

On ré-organise

$$\Leftrightarrow -f(x_n) - (c-x_n)f'(x_n) = \int_{x_n}^c (c-t)f''(t) dt$$

$$\Leftrightarrow x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - c = \frac{1}{f'(x_n)} \int_{x_n}^c (c-t)f''(t) dt$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} - c = \frac{1}{f'(x_n)} \int_{x_n}^c (c-t)f''(t) dt$$

$$\text{Ainsi on a } |x_{n+1} - c| = \left| \frac{1}{f'(x_n)} \int_{x_n}^c (c-t)f''(t) dt \right|$$

Rappel : On sait que $x_n < c$

$$\leq \frac{1}{|f'(x_n)|} \int_{x_n}^c |(c-t)f''(t)| dt$$

$$\leq \frac{1}{|f'(x_n)|} \int_{x_n}^c (c-t) \underbrace{|f''(t)|}_{\leq M} dt$$

$$\leq \frac{M}{m} \int_{x_n}^c (c-t) dt = \frac{M}{m} \left[\frac{-(c-t)^2}{2} \right]_{x_n}^c = \frac{M}{2m} (c-x_n)^2$$

6. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_{n_0} - c| \leq \frac{m}{M}$

On sait que la suite (x_n) converge vers c .

On applique la définition de $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ avec $\varepsilon = \frac{m}{M} > 0$,

Ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_{n_0} - c| \leq \frac{m}{M}$

et prouver alors que pour tout $n \geq n_0$, $|x_n - c| \leq \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^{n-n_0}}}$

On fait par récurrence, à partir de n_0 , $H_{<n>} : |x_n - c| \leq \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^{n-n_0}}}$

Initialisation avec n_0

$$\text{Comme } \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^{n_0-n_0}}} = \frac{M}{m} \frac{1}{2^{2^0}} = \frac{M}{m}$$

Donc $H_{<n_0>}$ est vrai

Hérédité. On suppose $H_{<n>}$

$$\text{On a } |x_{n+1} - c| \leq \frac{M}{2m} (x_n - c)^2$$

$$\leq \frac{M}{2m} \left[\frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^{n-n_0}}} \right]^2$$

$$\leq \frac{2m}{M} \left[\frac{1}{2^{2^{n-n_0}}} \right]^2 = \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2 \cdot 2^{n-n_0}}} = \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^{n+1-n_0}}}$$

Donc $H_{<n+1>}$ est vraie

7. Montrer alors que pour tout $q \in]0, 1[$, $|x_n - c| \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(q^n)$.

Pour tout $q \in]0, 1[$, on a : $\forall n \geq n_0, |x_n - c| \leq \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^{n-n_0}}} = \frac{K}{2^{2^n}}$

$$\text{Conclusion : } \frac{|x_n - c|}{q^n} \leq \frac{\frac{K}{2^{2^n}}}{q^n} = \frac{K}{2^{2^n} \cdot q^n} = \frac{K}{e^{2^n \ln(2) + n \ln(q)}} = \frac{K}{e^{2^n \ln(2) [1 + o(1)]}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc pour tout $q \in]0, 1[$, $|x_n - c| \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(q^n)$.

Moralité : *la suite (x_n) converge vers c plus vite que n'importe quelle suite géométrique. Donc très très vite !*