DM 23 Lien coefficient-Racine et application

Exercice 1. [Correction] L'objectif de ce problème est de montrer que si p est un entier strictement positif alors

$$\zeta(2p) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^{2p}} \quad \text{est un multiple } \textit{rationnel} \text{ de } \pi^{2p}$$

On retrouvera alors la formule $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et on calculera la valeur de $\zeta(4)$.
Pour cela nous introduirons les «formules de Newton» qui permettent d'exprimer les sommes de puissances des racines d'un polynôme scindé à l'aide de ses fonctions symétriques. On appliquera ces formules à une famille de polynômes à coefficients entiers dont les racines s'expriment à l'aide de la fonction cotangente, qui, restreinte à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ sera notée

$$\cot\colon \begin{cases} \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x \longmapsto \dfrac{\cos x}{\sin x} \end{cases}$$

Si a et b sont des nombres complexes et p un entier positif on rappelle la formule de factorisation :

$$a^p - b^p = (a-b)\left(\sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-1-i}\right) \tag{*}$$

Commentaire.

- $>$ La partie I sur les formules de Newton est d'un bon niveau Mine/Centrale
- $>$ La partie II fait un peu peur mais n'est pas si difficile mais d'un bon niveau
- $>$ La partie III est plus facile MAIS ...

Conclusion : Dur, dur , dur

Partie I - Formules de Newton

Soit A un polynôme de degré $n \geqslant 1$, de racines (pas nécessairement distinctes) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{A} = a_0 + a_1 \mathrm{X} + \cdots + a_n \mathrm{X}^n = a_n (\mathrm{X} - \alpha_1) \cdots (\mathrm{X} - \alpha_n).$$

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on rappelle que sa k-ième fonction symétrique élémentaire est définie par :

$$\sigma_0 = 1, \quad \text{et si } k \geqslant 1 \quad \sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on notera S_p sa p-ième somme de Newton définie par : $\mathrm{S}_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^p$

1. Cas $n = 3$.
   (a) Exprimer σ_1, σ_2 et σ_3 en fonctions de α_1, α_2 et α_3 puis en fonction de a_0, a_1, a_2 et a_3.
   (b) Exprimer alors les sommes de Newton
   $$\mathrm{S}_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \mathrm{S}_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$$
   en fonction de σ_1, σ_2 et σ_3.
   (c) Application. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 26 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 38 \end{cases}$
2. Cas général $n \in \mathbb{N}^*$
   (a) Sans justifier, rappeler pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ l'expression de la fonction symétrique σ_j à l'aide de j, a_n et a_{n-j} et écrire l'expression développée de A à l'aide de a_n et des fonctions symétriques $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.
   (b) En exprimant le fait que les α_k (pour $1 \leqslant k \leqslant n$) sont racines de A , établir la formule de Newton d'ordre n :
   $$\mathrm{S}_n - \sigma_1 \mathrm{S}_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} \mathrm{S}_1 + (-1)^n n \sigma_n = 0$$
3. Nous allons généraliser cette formule à tout entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n - 1$.
   (a) Justifier $\mathrm{A}'(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}(\mathrm{X}) - \mathrm{A}(\alpha_i)}{\mathrm{X} - \alpha_i}$
   (b) En utilisant la formule de factorisation (*),
   montrer que : $\mathrm{A}'(\mathrm{X}) = a_n \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sigma_j \left(\sum_{k=0}^{n-j-1} \alpha_i^k \mathrm{X}^{n-j-k-1} \right)$
   puis montrer que : $\mathrm{A}'(\mathrm{X}) = a_n \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n-1} (-1)^{p-k} \sigma_{p-k} \mathrm{S}_k \mathrm{X}^{n-p-1}$
   (c) En reprenant alors l'expression obtenue à la question 2.a, en déduire pour tout $1 \leqslant p \leqslant n - 1$ les formules de Newton d'ordre p :
   $$\mathrm{S}_p - \sigma_1 \mathrm{S}_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1} \mathrm{S}_1 + (-1)^p p \sigma_p = 0$$

Partie II - Familles de polynômes

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on définit le polynôme $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ par $\mathrm{P}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \mathrm{X}^{n-k}$

1. Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n en fonction de n.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Im}\left((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \cos^{2n-2k} x \sin^{2k+1} x$$

   (où $\operatorname{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z)

   (b) Établir, si $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{P}_n\left(\cot^2(x)\right) = \dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1} x}$

   (c) En déduire $\quad \mathrm{P}_n = (2n+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\mathrm{X} - \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right)$
3. Soient $n \geqslant 1$ et $k \in [\![1; n]\!]$, montrer que la k-ième fonction symétrique de P_n est donnée par

$$\sigma_k(n) = \frac{(2n)!}{(2n-2k)!(2k+1)!}$$

4. L'écriture précédente permet, en identifiant n à la variable, de définir pour tout $k \geqslant 1$ un polynôme que l'on notera également σ_k à coefficients réels. On a ainsi

$$\sigma_1 = \frac{2\mathrm{X}(2\mathrm{X}-1)}{3!} = \frac{2}{3}\mathrm{X}^2 - \frac{1}{3}\mathrm{X}.$$

   (a) Donner l'écriture développée du polynôme σ_2.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le polynôme σ_k est à coefficients rationnels et de degré $2k$.
   Exprimer son coefficient dominant en fonction de k.
5. On définit par récurrence une famille de polynômes S_p pour $p \geqslant 1$ à l'aide des formules de Newton :

$$\mathrm{S}_p = \sigma_1\ \mathrm{S}_{p-1} - \cdots - (-1)^{p-1}\sigma_{p-1}\ \mathrm{S}_1 - (-1)^p p\sigma_p = -\left(\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i \sigma_i\ \mathrm{S}_{p-i}\right) - (-1)^p p\sigma_p$$

   (a) Calculer S_1 et S_2.

   (b) Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, le polynôme S_p est à coefficients rationnels, de degré au plus $2p$.

   (c) Justifier que pour tout $p \geqslant 1$ et tout $n \geqslant p$ on a

$$\mathrm{S}_p(n) = \sum_{k=1}^{n} \cot^{2p}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

   (d) En déduire que si on note s_p le coefficient du terme en X^{2p} de S_p alors

$$s_p = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \cot^{2p}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{n^{2p}}$$

Partie III - Encadrement des sommes partielles

1. Pour tout réel $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, montrer que : $\sin x < x < \tan x$, puis $0 < \dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x < 1$
2. Soit p un entier strictement positif, en utilisant la formule de factorisation (*) rappelée dans l'introduction du problème, montrer
$$0 < \frac{1}{x^{2p}} - \cot^{2p} x < \frac{p}{x^{2(p-1)}} \qquad \text{pour } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$
3. Établir alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$0 < \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2p} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2p}} - \sum_{k=1}^{n} \cot^{2p}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < p\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2(p-1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2(p-1)}}$$
4. Montrer alors
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^{2p}} = \frac{s_p}{2^{2p}} \pi^{2p}$$
En déduire le résultat annoncé, CàD $\zeta(2p)$ est un multiple rationnel de π^{2p}.
5. Calculer les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) Soit A un polynôme de degré $n \geqslant 1$, de racines (pas nécessairement distinctes) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{A} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n = a_n\left(\mathrm{X} - \alpha_1\right)\cdots\left(\mathrm{X} - \alpha_n\right).$$

Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on rappelle que sa k-ième fonction symétrique élémentaire est définie par :

$$\sigma_0 = 1, \quad \text{et si } k \geqslant 1 \quad \sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on notera S_p sa p-ième somme de Newton définie par : $\mathrm{S}_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^p$

Partie I - Formules de Newton

1. Cas $n = 3$.

(a) Exprimer σ_1, σ_2 et σ_3 en fonctions de α_1, α_2 et α_3 puis en fonction de a_0, a_1, a_2 et a_3.

On a $A = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 = a_3(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$

Ainsi on a $\sigma_1 =$ *La somme des "mélanges" 1 par 1*

$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \ominus\frac{a_2}{a_3}$$

$\sigma_2 =$ *La somme des "mélanges" 2 par2*

$$= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 = \frac{a_1}{a_3}$$

$\sigma_3 =$ *La somme des "mélanges" 3 par 3* $= \ominus\frac{a_0}{a_3}$

$$= \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$$

(b) Exprimer alors les sommes de Newton en fonction de σ_1, σ_2 et σ_3.

On a facilement $\mathrm{S}_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \sigma_1$

De plus on a $\sigma_1^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2$

$$= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_3\alpha_2 + 2\alpha_3\alpha_1$$

Conclusion : $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

Plus difficile, $\sigma_1.S_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\right)$

$$= \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \underbrace{\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_3^2\alpha_2 + \alpha_3\alpha_2^2 + \alpha_3^2\alpha_1 + \alpha_3\alpha_1^2}_{\textit{C'est presque } \sigma_1.\sigma_2}$$

$$= S_3 + \sigma_1.\sigma_2 - 3\sigma_3$$

Conclusion : $S_3 = \sigma_1.S_2 - \sigma_1.\sigma_2 + 3\sigma_3$

$$= \sigma_1.\left(\sigma_1^2 - 2\sigma_2\right) - \sigma_1.\sigma_2 + 3\sigma_3$$

$$= \sigma_1^3 - 3\sigma_1.\sigma_2 + 3\sigma_3$$

(c) Application. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 26 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 38 \end{cases}$

Plutôt que chercher a, b, c, on va chercher $sigma_1$, σ_2 et σ_3

On a $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 26 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 38 \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 26 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1.\sigma_2 + 3\sigma_3 = 38 \end{cases}$

Ainsi $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = \dfrac{\sigma_1^2 - 26}{2} = -11$ et $\sigma_3 = \dfrac{38 - \sigma_1^3 + 3\sigma_1.\sigma_2}{3} = -12$

Conclusion : a, b, c sont les racines de $X^3 - 2X^2 - 11X + 12 = (X - 1)(X + 3)(X - 4)$

CàD l'ensemble $\{a, b, c\}$ est égale à l'ensemble $\{+1, -3, +4\}$

2. Cas général $n \in \mathbb{N}^*$

(a) Sans justifier, rappeler pour tout $j \in [\![0;n]\!]$ l'expression de la fonction symétrique σ_j à l'aide de j, a_n et a_{n-j} et écrire l'expression développée de A à l'aide de a_n et des fonctions symétriques $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

On a $\sigma_j = (-1)^j \dfrac{a_{n-j}}{a_n}$

$$\text{Et } A = a_n \left(\mathrm{X} - \alpha_1\right) \cdots \left(\mathrm{X} - \alpha_n\right)$$
$$= a_n \left[X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} \cdots + (-1)^n \sigma_n\right]$$

(b) En exprimant le fait que les α_k (pour $1 \leqslant k \leqslant n$) sont racines de A , établir la formule de Newton d'ordre n : $\mathrm{S}_n - \sigma_1\ \mathrm{S}_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}\ \mathrm{S}_1 + (-1)^n n\sigma_n = 0$

On sait que α_i est une racine du polynôme A,

Ainsi on a : $(\alpha_i)^n - \sigma_1(\alpha_i)^{n-1} + \sigma_2(\alpha_i)^{n-2} \cdots + (-1)^n \sigma_n = 0$

On somme ces égalités de $i = 1$ à $i = n$,

ainsi : $\mathrm{S}_n - \sigma_1\ \mathrm{S}_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}\ \mathrm{S}_1 + (-1)^n n\sigma_n = 0$

3. Nous allons généraliser cette formule à tout entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

(a) Justifier $\mathrm{A}'(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}(\mathrm{X}) - \mathrm{A}\left(\alpha_i\right)}{\mathrm{X} - \alpha_i}$

$$\text{On a } A' = a_n \left[\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)\right]' = a_n \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{k=1 k\neq i}^{n}(X - \alpha_k)\right)$$

$$\text{Et } \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}(\mathrm{X}) - \mathrm{A}\left(\alpha_i\right)}{\mathrm{X} - \alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A(X)) - 0}{X - \alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)}{X - \alpha_i} = a_n \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{k=1 k\neq i}^{n}(X - \alpha_k)\right)$$

Donc on a bien égalité

(b) En utilisant la formule de factorisation (*),

montrer que : $\mathrm{A}'(\mathrm{X}) = a_n \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\sigma_j\left(\sum_{k=0}^{n-j-1}\alpha_i^k \mathrm{X}^{n-j-k-1}\right)$

$$\text{On a } \mathrm{A}'(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A(X) - A\left(\alpha_i\right)}{X - \alpha_i}$$

On remplace A par $a_n \left[X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} \cdots + (-1)^n \sigma_n\right]$

$$= a_n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\sigma_j \frac{X^j - \alpha_i^j}{X - \alpha_i}$$

On apporte la factorisation

$$= a_n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\sigma_j\left(\sum_{k=0}^{n-j-1}\alpha_i^k \mathrm{X}^{n-j-k-1}\right)$$

puis montrer que : $\mathrm{A}'(\mathrm{X}) = a_n \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant p\leqslant n-1}(-1)^{p-k}\sigma_{p-k}\ \mathrm{S}_k \mathrm{X}^{n-p-1}$

Il faut manipuler les sommes doubles

On ré-indexe difficile le couple j, k avec le couple p, k et $p = j + k$,

$$\text{ainsi } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p}$$

On intervertit les sommes

$$\text{Ainsi } \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p} = \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p}\sum_{i=1}^{n}$$

$$\text{Conclusion : } \mathrm{A}'(\mathrm{X}) = a_n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\sigma_j\left(\sum_{k=0}^{n-j-1}\alpha_i^k \mathrm{X}^{n-j-k-1}\right)$$

$$a_n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1}(-1)^j\sigma_j\alpha_i^k \mathrm{X}^{n-j-k-1}$$

$$= a_n \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{p-k}\sigma_{p-k}\alpha_i^k X^{n-p-1}$$

$$= a_n \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\sigma_{p-k}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^k\right) X^{n-p-1}$$

$$= a_n \sum_{0\leqslant k\leqslant p\leqslant n-1}(-1)^{p-k}\sigma_{p-k}\ \mathrm{S}_k \mathrm{X}^{n-p-1}$$

(c) En reprenant alors l'expression obtenue à la question 2.a, en déduire pour tout $1 \leqslant p \leqslant n-1$ les formules de Newton d'ordre p : $\mathrm{S}_p - \sigma_1\ \mathrm{S}_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1}\sigma_{p-1}\ \mathrm{S}_1 + (-1)^p p\sigma_p = 0$

On a $A' = a_n \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant p\leqslant n-1}(-1)^{p-k}\sigma_{p-k}\ \mathrm{S}_k \mathrm{X}^{n-p-1}$

$$= a_n \sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\sigma_{p-k}\ \mathrm{S}_k\right)\mathrm{X}^{n-p-1}$$

Avec Q2, on a $A = a_n\left[X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2}\cdots + (-1)^n\sigma_n\right]$

Ainsi $A' = a_n\left[nX^{n-1} - \sigma_1(n-1)X^{n-2} + \sigma_2(n-2)X^{n-3}\cdots\right]$

$$= a_n \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\sigma_p(n-p)X^{n-p-1}$$

On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\sigma_{p-k}\ \mathrm{S}_k = (-1)^p\sigma_p(n-p)$

De plus $S_0 = n$, donc en ré-organisant, on a bien

$$\text{Conclusion : } \mathrm{S}_p - \sigma_1\ \mathrm{S}_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1}\sigma_{p-1}\ \mathrm{S}_1 + (-1)^p p\sigma_p = 0$$

Partie II - Familles de polynômes

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on définit le polynôme $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ par $\mathrm{P}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\mathrm{X}^{n-k}$

1. Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n en fonction de n.

   On a $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\mathrm{X}^{n-k} = \underbrace{(2n+1)X^n}_{k=0} + \cdots$

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\mathrm{Im}\left((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^{2n+1}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\cos^{2n-2k}(x)\sin^{2k+1}(x)$

   On a $(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^{2n+1} = \displaystyle\sum_{p=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{p}(\cos(x))^{2n+1-p}(i\sin(x))^p$

   Si p pair c'est dans $\mathbb{R}$ et Si p impair c'est dans $i\mathbb{R}$

   $$\Longrightarrow \mathrm{Im}\left((\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^{2n+1}\right) = \sum_{p\ impair}$$

   On ré-indexe avec $p = 2k+1$

   $$\text{Conclusion : } \mathrm{Im}\left((\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\cos^{2n-2k}(x)\ \sin^{2k+1}(x)$$

   (b) Établir, si $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $P_n\left(\cot^2(x)\right) = \dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1}x}$

   Comme $(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^{2n+1} = \left(e^{ix}\right)^{2n+1} = e^{i(2n+1)x}$, on a

$$\sin\Big((2n+1)x\Big) = \operatorname{Im}\left((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\cos^{2n-2k}(x)\sin^{2k+1}(x), \text{ ainsi}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\Big((2n+1)x\Big)}{\sin^{2n+1}(x)} &= \frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\cos^{2n-2k}(x)\sin^{2k+1}(x)}{\sin^{2n+1}(x)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\frac{\cos^{2n-2k}(x)}{\sin^{2n-2k}(x)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\cot^{2n-2k}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\square^{2n-2k} \qquad \square = \cot(x)\\
&= P_n\left(\cot^2(x)\right)
\end{aligned}$$

(c) En déduire $\mathrm{P}_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(\mathrm{X} - \cot^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

L'objectif est de factoriser le polynôme,
On a besoin : du degré, du coefficient dominant et des racines

$>$ On sait que $\deg = n$ et coefficient dominant c'est $(2n+1)$

$>$ Comme $P_n\left(\cot^2\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = \dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \dfrac{\sin((k\pi)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = 0$

donc pour $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $r_k = \cot^2\dfrac{k\pi}{2n+1}$ est une racine de P_n

elles sont n et 2 à 2 $\neq$ donc on les a toutes

ET $\mathrm{P}_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(\mathrm{X} - \cot^2\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$

3. Soient $n \geqslant 1$ et $k \in [\![1; n]\!]$, montrer que la k-ième fonction symétrique de P_n est $\sigma_k(n) = \dfrac{(2n)!}{(2n-2k)!(2k+1)!}$

Pour $k \in \{1, 2, .., n\}$,on sait que $(-1)^n - k\sigma_k$ c'est le coefficient de $(-1)^n - k\dfrac{a_{n-k}}{a_n}$ dans le polynôme P_n

Comme $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\mathrm{X}^{n-k}$, on a $(-1)^n - k\sigma_k = (-1)^n - k\dfrac{\binom{2n+1}{2k+1}}{2n+1}$,

$$\text{CàD } \sigma_k = \frac{1}{(2n+l)}\frac{(2n+1)!}{(2n-2k)!(2k+1)!} = \frac{(2n)!}{(2n-2k)!(2k+1)!}$$

4. L'écriture précédente permet, en identifiant n à la variable, de définir pour tout $k \geqslant 1$ un polynôme que l'on notera également σ_k à coefficients réels. On a ainsi

$$\sigma_1 = \frac{2\mathrm{X}(2\mathrm{X}-1)}{3!} = \frac{2}{3}\mathrm{X}^2 - \frac{1}{3}\mathrm{X}.$$

(a) Donner l'écriture développée du polynôme σ_2.

On a $\sigma_2 = \dfrac{(2n)!}{(2n-4)!(5)!} = \dfrac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{5!}$

Conclusion : $\sigma_2 = \dfrac{2X(2X-1)(2X-2)(2X-3)}{5!}$

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le polynôme σ_k est à coefficients rationnels et de degré $2k$.
Exprimer son coefficient dominant en fonction de k.

On a $\sigma_k = \dfrac{(2n)!}{(2n-2k)!(2k+1)!} = \dfrac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots(2n-2k+2)(2n-2k+1)}{(2k+1)!}$

Conclusion : $\sigma_k = \dfrac{2X(2X-1)(2X-2)\cdots(2X-2k+1)}{(2k+1)!}$

Donc le polynôme σ_k est à coefficients rationnels, CàD $\mathbb{Q}$, et de degré $2k$

Et son coefficient dominant vaut $\dfrac{2^{2k}}{(2k+1)!}$

5. On définit par récurrence une famille de polynômes S_p pour $p \geqslant 1$ à l'aide des formules de Newton :

$$\mathrm{S}_p = \sigma_1\ \mathrm{S}_{p-1} - \cdots - (-1)^{p-1}\sigma_{p-1}\ \mathrm{S}_1 - (-1)^p p\sigma_p = -\left(\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i\sigma_i\ \mathrm{S}_{p-i}\right) - (-1)^p p\sigma_p$$

(a) Calculer S_1 et S_2.

On a $S_1 = \underbrace{-\left(\sum_{i=1}^{0}(-1)^i\sigma_i\ \mathrm{S}_{1-i}\right)}_{=0} - (-1)^1 1\sigma_1 = \sigma_1 = \dfrac{n(2n-1)}{3}$

$$\begin{aligned} S_2 &= -\left(\sum_{i=1}^{1}(-1)^i\sigma_i\ \mathrm{S}_{2-i}\right) - (-1)^2 2\sigma_2 \\ &= \sigma_1 S_1 - 2\,\sigma_2 \\ &= \left(\frac{n(2n-1)}{3}\right)^2 - 2\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{5!} \end{aligned}$$

(b) Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, le polynôme S_p est à coefficients rationnels, de degré au plus $2p$.

On doit faire une récurrence FORTE et utiliser

$$\mathrm{S}_p = -\left(\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i\underbrace{\sigma_i}_{\deg=2i}\ \underbrace{\mathrm{S}_{p-i}}_{\deg=2p-2i}\right) - (-1)^p p\underbrace{\sigma_p}_{\deg=2p}$$

Donc le degré final est bien $\leqslant 2p$

(c) Justifier que pour tout $p \geqslant 1$ et tout $n \geqslant p$ on a $\mathrm{S}_p(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cot^{2p}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

Comme les racines de P_n sont les reels $r_k = \cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$, on a (voir Partie I)

$$\mathrm{S}_p(n) = \sum_{k=1}^{n}(r_k)^p = \sum_{k=1}^{n}\cot^{2p}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

(d) En déduire que si on note s_p le coefficient du terme en X^{2p} de S_p alors $s_p = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\cot^{2p}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{n^{2p}}$

On a $S_p = s_p X^{2p} + \cdots$ donc $s_p = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_p}{n^{2p}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\cot^{2p}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{n^{2p}}$

Partie III - Encadrement des sommes partielles

(a) Pour tout réel $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, montrer que : $\sin x < x < \tan x$, puis $0 < \dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x < 1$

La fonction sinus est concave et Tangente est convexe sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$

$$\text{Ainsi } \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leqslant \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$$

$$\text{et } \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 < \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$$

De plus comme tout est > 0, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[,\ & 0 < \sin x \leqslant x \leqslant \tan x \\ \Longrightarrow\ & 0 < \sin^2 x \leqslant x^2 \leqslant \tan^2 x \\ \Longrightarrow\ & 0 < \frac{1}{\tan^2 x} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2 x} \\ \Longrightarrow\ & 0 < \cot^2 x \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \cot^2 x \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[,\ 0 < \dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x \leqslant 1$

(b) Soit p un entier strictement positif, en utilisant la formule de factorisation (*) rappelée dans l'introduction du problème, montrer $0 < \dfrac{1}{x^{2p}} - \cot^{2p} x < \dfrac{p}{x^{2(p-1)}}$ pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

Pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ et $p \in \mathbb{N}^*$

Lorsque $0 \leqslant a \leqslant b$, on a $$\begin{aligned} b^p - a^p &= (b-a)\left(\sum_{i=0}^{p-1} \underbrace{a^i}_{\leqslant b^i} b^{p-1-i}\right) \\ &\leqslant (b-a)\left(\sum_{i=0}^{p-1} b^{p-1}\right) \\ &\leqslant (b-a)\, p\, b^{p-1} \end{aligned}$$

Conclusion : On applique cette inégalité avec $a = \cot^2 x$ et $b = \dfrac{1}{x^2}$. On a bien $a < b$

Ainsi $\dfrac{1}{x^{2p}} - \cot^{2p} x < \dfrac{p}{x^{2(p-1)}}$

Comme $0 \leqslant \cot^2 x \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ et $x \longmapsto x^{p-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

On a bien l'autre inégalité, CàD $\cot^{2p} x \leqslant \dfrac{1}{x^{2p}}$

(c) Établir alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 < \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2p} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2p}} - \sum_{k=1}^{n} \cot^{2p}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < p\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2(p-1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2(p-1)}}$$

On applique l'égalité précédente avec $x = \dfrac{k\pi}{2n+1} \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et on somme de $k=1$ à $k=n$

$$\text{Ainsi } 0 < \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2p} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2p}} - \sum_{k=1}^{n} \cot^{2p}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < p\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2(p-1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2(p-1)}}$$

(d) Montrer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^{2p}} = \frac{s_p}{2^{2p}}\pi^{2p}$

Gendarme

En déduire le résultat annoncé, CàD $\zeta(2p)$ est un multiple rationnel de π^{2p}.

Comme $s_p \in \mathbb{Q}$, on a bien que $\zeta(2p) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^{2p}} = \frac{s_p}{2^{2p}}\pi^{2p} =$ est un multiple rationnel de π^{2p}.

(e) Calculer les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Comme $S_1 = \dfrac{n(2n-1)}{3}$, on a $s_1 = \dfrac{2}{3}$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{s_1}{2^2}\pi^2 = \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}$

Comme $S_2 = \left(\dfrac{n(2n-1)}{3}\right)^2 - 2\dfrac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{5!}$,

on a $s_2 = \dfrac{4}{9} - \dfrac{32}{120} = \dfrac{4.40 - 32.3}{3.120} = \dfrac{64}{3.120} = \dfrac{16}{3.30} = \dfrac{16}{90}$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^4} = \zeta(4) = \frac{s_2}{2^4}\pi^4 = \frac{16}{90}\frac{\pi^4}{16} = \frac{\pi^4}{90}$