

## Compléments de cours

### 1 Complément sur les racines des polynômes à coefficients réels

1.1 Théorie	1
1.2 Problèmes	3
1.2.1 Un pb de type CCP	3
1.2.2 Un pb type mine/centrale	4

### 2 Les polynômes de Chebychev

2.1 Théorie	6
2.1.1 L'unicité	6

2.1.2 Construction directe des polynômes $T_n$	6
2.1.3 Construction par récurrence des polynômes $T_n$	8
2.1.4 Lien entre les deux constructions	8
2.2 Exemples de problèmes avec Chebychev	9
2.2.1 Un exemple de PB de concours	9
2.2.2 Une utilisation de Chebychev	10
2.2.3 Problème sur les polynôme très formateur et Chebychev intervient discrètement en partie 3	11
2.2.4 Centrale MP 2013 (très dispensable même si le résultat est sympa)	13

## 1 Complément sur les racines des polynômes à coefficients réels

### 1.1 Théorie

#### Définition 1. Racine et multiplicité

Soit  $P$  un polynôme et  $r \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

> On dit que  $r$  est une racine du polynôme  $P$

$$\text{Ssi } P(r) = 0$$

Ssi  $(X - r)$  se factorise

> On dit que  $r$  est une racine du polynôme  $P$  de multiplicité  $m$

$$\text{Ssi } P(r) = P'(r) = \dots = P^{(m-1)}(r) = 0$$

Ssi  $(X - r)^m$  se factorise

> On dit que  $r$  est une racine du polynôme  $P$  de multiplicité exactement  $m$

$$\text{Ssi } P(r) = P'(r) = \dots = P^{(m-1)}(r) = 0 \text{ ET } P^{(m)}(r) \neq 0$$

Ssi  $(X - r)^m$  se factorise, CàD  $P(X) = (X - r)^m Q(X)$  ET  $Q(r) \neq 0$

#### Définition 2. polynôme et Polynôme conjugué

> On suppose que  $P$  est un polynôme de degré  $\alpha$

$$\text{alors on peut écrire } P(X) = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k X^k = a_\alpha \prod_{k=1}^{\alpha} (X - r_k) \quad \text{ET } a_\alpha \neq 0$$

**Attention :**  $X$  est un "indicateur" de position

> La polynôme conjugué  $\bar{P}$  ou  $\overline{P(X)}$

$$\text{C'est polynôme } \bar{P} = \overline{P(X)} = \sum_{k=0}^{\alpha} \overline{a_k} X^k = \overline{a_\alpha} \prod_{k=1}^{\alpha} (X - \bar{r}_k)$$

**Attention :** Lorsque  $r, x, z \in \mathbb{C}$ , on peut écrire  $\overline{\overline{P(r)}} = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k r^k = a_n \prod_{k=1}^n (r - r_k)$  et on a

$$\overline{P(r)} = \sum_{k=0}^{\alpha} \overline{a_k} \bar{r}^k = \overline{a_\alpha} \prod_{k=1}^{\alpha} (\bar{r} - \bar{r}_k)$$

**Attention :**  $\bar{\bar{X}}$  n'a pas de sens donc  $\overline{\overline{P(X)}} = \overline{P(\bar{X})}$  n'a pas de sens!!!

### **Théorème 3. racine des polynômes à coefficients réels**

On suppose que un polynôme de degré  $n$  à coefficients réels

$$\text{CàD } P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad \text{ET } a_n \neq 0 \text{ et } \forall k, a_k \in \mathbb{R}$$

> On suppose que  $r$  est une racine de  $P$

Alors  $\bar{r}$  est aussi une racine de  $P$

> On suppose que  $r$  est une racine de  $P$  de multiplicité (exact)  $m$

Alors  $\bar{r}$  est aussi une racine de  $P$  de multiplicité (exact)  $m$

#### **Démonstration de «Alors $\bar{r}$ est aussi une racine de $P$ »**

On va montrer que  $P(\bar{r}) = 0$

Comme  $r$  est une racine de  $P$ , on a  $P(r) = 0$

Comme  $P$  est un polynôme à coefficient réel, on a  $P(X) = \bar{P}(X)$

$$\text{On a le calcul : } P(\bar{r}) = \bar{P}(\bar{r}) = \overline{P(r)} = \overline{0} = 0$$

Conclusion :  $\bar{r}$  est aussi une racine de  $P$

#### **Démonstration de «Alors $\bar{r}$ est aussi une racine de $P$ de multiplicité $m$ »**

On va, avec du calcul, montrer que  $P(X) = (X - \bar{r})^m Q(X)$

Comme  $r$  est une racine de  $P$  de multiplicité (exact)  $m$ , on peut écrire  $P(X) = (X - r)^m Q_1(X)$

Comme  $P$  est un polynôme à coefficient réel, on a  $P(X) = \bar{P}(X)$

$$\text{Ainsi son a } P(X) = \bar{P}(X)$$

*re-lire la définition de  $\bar{P}$*

$$= (X - \bar{r})^m \underbrace{\bar{Q}_1(X)}_{\text{C'est un poly}}$$

Conclusion :  $(X - \bar{r})^m$  se factorise, CàD  $\bar{r}$  est aussi une racine de  $P$  de multiplicité  $m$

#### **Application :**

On a facilement que que :  $z_0 = \bar{z}_0 \iff z_0 \in \mathbb{R}$

Conclusion : Si/Lorsque  $P$  est un polynôme à coefficient réel, les racines de  $P$  sont

> Soit réel, CàD  $r \in \mathbb{R}$

> Soit elles vont par paire (et de même multiplicité), CàD  $z_0$  et  $\bar{z}_0$

$$\text{Ainsi } P \text{ peut se factoriser sous la forme } P(X) = \lambda \cdot \underbrace{\prod_{k=1}^p (X - r_k)^{\alpha_k}}_{=A(X)} \cdot \underbrace{\prod_{\ell=1}^q [(X - z_\ell)(X - \bar{z}_\ell)]^{\beta_\ell}}_{=B(X)}$$

## 1.2 Problèmes

### 1.2.1 Un pb de type CCP

**Exercice 1.** [Correction] On considère la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$P_0 = 1, P_1 = X \text{ et } \forall n \geq 1, (P_n)^2 = 1 + P_{n+1}P_{n-1} \quad (E_n)$$

Attention : Il est évident  $\forall n, P_n \neq 0$  et que

$$(E_n) \quad P_{n+1} = \frac{(P_n)^2 - 1}{P_{n-1}} \text{ Mais c'est une fraction}$$

À priori, rien ne prouve que  $P_{n+1}$  est un polynôme.

**Le but de ce problème est de montrer que  $P_{n+1}$  est un polynôme.**

On va montrer, à l'aide d'une récurrence forte,  $H_{<n>} : P_{n-1}$  divise  $(P_n)^2 - 1$ .

1. Initialisation

Calculer  $P_2$  et  $P_3$ .

Ainsi  $H_{<1>}$  et  $H_{<2>}$  sont vraies

Hérédité. On suppose donc que  $\forall k \in \{2, \dots, n\}, P_{k-2}$  divise  $(P_{k-1})^2 - 1$ , ainsi  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  sont des polynômes.

On va démontrer que  $P_{n+1}$  est un polynôme, i.e.  $P_{n-1}$  divise  $(P_n)^2 - 1$ .

2. Pour  $k \in \{2, \dots, n\}$ , calculer  $\deg P_k$ .

3. Soit  $a$  une racine réelle ou complexe de  $P_{n-1}$ .

(a) Montrer que  $P_{n-2}^2(a) = 1$ , puis  $P_n(a) = -P_{n-2}(a)$ .

(b) En déduire que  $a$  est racine de  $(P_n)^2 - 1$ .

Conclusion : les racines de  $P_{n-1}$  sont bien des racines de  $(P_n)^2 - 1$ .

Attention : on ne peut pas encore conclure que  $P_{n-1}$  divise  $(P_n)^2 - 1$ ,

il faut en plus vérifier que, pour chaque racine, la multiplicité dans  $P_{n-1}$  est inférieure à celle dans  $(P_n)^2 - 1$ .

4. Soit  $a$  une racine réelle ou complexe de  $P_{n-1}$  et  $q$  sa multiplicité exacte dans le polynôme  $P_{n-1}$ .

Ainsi  $\exists A \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P_{n-1}(X) = (X - a)^q A(X)$  et  $A(a) \neq 0$ .

On pose d'autre part  $e = P_n(a)$ .

On vient de voir comme  $a$  est une racine de  $P_{n-1}$  alors  $a$  est une racine de  $P_n^2 - 1$ ,

ainsi que  $P_n^2(a) - 1 = 0$  donc  $P_n(a) = e = \pm 1$ .

On note  $r$  (resp  $s$ ) la multiplicité exacte de  $a$  dans le polynôme  $P_n - e$  (resp  $P_{n-2} + e$ ).

(a) Traduire les notations du texte en terme de polynôme.

On va montrer par un R.A. que  $r \geq q$  donc on suppose que  $r < q$ .

(b) Montrer que  $r$  est aussi la multiplicité exacte de  $a$  dans le polynôme  $(P_n)^2 - 1$ .

(c) On suppose que  $r < s$ .

i. Montrer que  $r$  est la multiplicité exacte de  $a$  dans le polynôme  $1 + P_n P_{n-2}$ .

ii. A l'aide de  $(E_{n-1})$  trouver une contradiction.

(d) Montrer de même que l'on ne peut avoir  $s < r$ .

(e) On a donc  $r = s$ . A l'aide  $(E_{n-2})$ , trouver une contradiction.

(f) Conclure  $P_{n+1}$  est bien un polynôme.

Conclusion : La suite  $(P_n)$  est bien une suite de polynômes.

### 1.2.2 Un pb type mine/centrale

**Exercice 2. [Correction]** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On appelle polynôme trigonométrique (réel) de degré  $n$  une fonction de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \dots + \alpha_n \cos nx + \beta_1 \sin x + \dots + \beta_n \sin nx \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)) \end{aligned}$$

où  $(\alpha_0, \dots, \beta_n)$  sont des réels et  $(\alpha_n, \beta_n) \neq (0, 0)$ .

#### Partie A

Soit  $f$  un polynôme trigonométrique (réel) de degré  $n$  fixé.

1. Présentation de  $f$  via les polynômes.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme à coefficient dans  $\mathbb{C}$ , CàD  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$\forall x, \quad f(x) = e^{-inx} P(e^{ix}).$$

De plus vérifier que  $P$  est de degré  $2n$  et expliciter ses coefficients en fonction des  $\alpha_i$  et  $\beta_i$

(b) Justifier que le polynôme  $P$  est unique (ainsi les coefficients  $a_k$  sont uniques)

En déduire que l'écriture d'un polynôme trigonométrique est unique.

(c) Vérifier que  $P(0) \neq 0$  et que  $\forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ ,  $\overline{a_k} = a_{2n-k}$

2. Sur les racines de  $P$ .

(a) Montrer que :  $\overline{P}(X) = X^{2n} P\left(\frac{1}{X}\right)$

(b) En déduire que si  $z_0$  est une racine de  $P$  de multiplicité exactement  $m$

alors  $\frac{1}{\overline{z_0}}$  est aussi une racine de  $P$  de multiplicité exactement  $m$ .

**Méthode :** On a  $P(X) = (X - z_0)^m Q_1(X)$ .

On va, via du calcul, montrer que :  $P(X) = \left(X - \frac{1}{\overline{z_0}}\right)^m Q_2(X)$

(c) Justifier que :  $z_0 = \frac{1}{\overline{z_0}} \iff |z_0| = 1$

Conclusion : Les racines de  $P$  sont (forcément  $\neq 0$  car  $P(0) \neq 0$ )

> Soit que module 1, CàD  $e^{i\theta_k}$

> Soit elles vont par paire, CàD  $z_0$  et  $\frac{1}{\overline{z_0}}$

Ainsi  $P$  peut se factoriser sous la forme  $P(X) = \lambda \cdot \underbrace{\prod_{k=1}^p (X - e^{i\theta_k})^{\alpha_k}}_{=A(X)} \cdot \underbrace{\prod_{k=1}^q \left[ (X - z_k) \left(X - \frac{1}{\overline{z_k}}\right) \right]^{\beta_k}}_{=B(X)}$

#### Partie B

On suppose dans cette partie que  $f$  est un polynôme trigonométrique réel, de degré  $n$  et Positif, CàD  $\forall x, f(x) \geq 0$ .

On vient de voir que  $f(x) = e^{-inx} P(e^{ix})$  et  $P(X) = \lambda \cdot A(X) \cdot B(X)$ .

1. Soit  $e^{i\theta_0}$  une racine de  $A(X)$  de multiplicité  $\alpha_0$ .

(a) Montrer que :  $f(x) = \left[ \sin\left(\frac{x - \theta_0}{2}\right) \right]^{\alpha_0} g(x)$

où  $g$  est  $C^0$  et  $g(\theta_0) \neq 0$ .

(b) Que peut-on en déduire que  $\alpha_0$  est un entier pair.

2. Montrer que  $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\left(e^{i\theta} - z_k\right) \left(e^{i\theta} - \frac{1}{\overline{z_k}}\right) = -\frac{e^{i\theta}}{\overline{z_k}} \left|e^{i\theta} - z_k\right|^2$$

$$\left(e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right)^2 = -e^{i\theta} e^{i\theta_k} \left|e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right|^2$$

3. Déduire de ce qui précédé (partie A et B) que si  $f$  est un polynôme trigonométrique réel positif de degré  $n$ , alors il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left| Q(e^{ix}) \right|^2$$

## 2 Les polynômes de Chebychev

### 2.1 Théorie

L'objectif de démontrer/dissenter/commenter le résultat de Pafnouti Chebychev

#### Théorème 4. Polynômes de Chebychev

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

Il existe un unique polynôme, noté  $T_n$ , tel que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$

Pré-requis.

- > La trigo
- > Faire la différence entre  $T_n(X)$ ,  $T_n(x)$  et  $T_n(\cos(\theta))$
- > **le théorème de rigidité des polynômes** et

#### 2.1.1 L'unicité

Quelque soit la présentation, l'unicité se fait indépendamment et avec la méthode usuelle

On suppose qu'il existe deux polynômes  $T_n$  et  $P$  tel que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)) = P(\cos(\theta))$

On va montrer que :  $T_n(X) = P(X)$  avec  $X$  MAJUSCULE

C'est le théorème de rigidité des polynômes

Les polynômes  $T_n$  et  $P$  coïncident sur une infinité de valeurs, ici sur tous les  $x = \cos\theta$ , CàD sur  $[-1, 1]$

Donc (rigidité des polynômes) Les polynômes  $T_n$  et  $P$  sont égaux, CàD  $T_n = P$  ou  $T_n(X) = P(X)$

Conclusion : Sous réserve d'existence, les polynômes de Chebychev sont uniques

#### 2.1.2 Construction directe des polynômes $T_n$ .

On va montrer "il existe" avec tout d'abord un calcul (analyse) et une synthèse (CàD je choisis  $T_n$  qui convient)

$$\begin{aligned} \text{On a } \cos(n\theta) &= \operatorname{Re}(e^{in\theta}) \\ &= \operatorname{Re}\left([e^{i\theta}]^n\right) \\ &= \operatorname{Re}([\cos\theta + i \sin\theta]^n) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i \sin\theta)^k (\cos\theta)^{n-k}\right) \end{aligned}$$

Or on note que

Si  $k$ =pair alors Plateau est réel

Si  $k$ =impair alors Plateau est imaginaire pur

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} (i \sin\theta)^k (\cos\theta)^{n-k} \\ &= \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} (i \sin\theta)^{2p} (\cos\theta)^{n-2p} \\ &\quad \text{On sait que } (i)^{2p} = (-1)^p \text{ et } S^2 = 1 - C^2 \\ &= \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} (-1)^p (1 - \cos^2\theta)^p (\cos\theta)^{n-2p} \\ &= \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} (\cos^2 - 1\theta)^p (\cos\theta)^{n-2p} \end{aligned}$$

Conclusion : je choisis Le polynôme  $T_n = \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} (X^2 - 1)^p X^{n-2p}$  qui convient.

**Travail à faire.**

**Exercice 3.** Calculer le coef dominant de chaque plateau, CàD de  $\underbrace{\binom{n}{2p} ((X^2 - 1)^p X^{n-2p})}_{\text{plateau n}^\circ k}$ .

En déduire que le coefficient de  $X^n$  qui est le monôme dominant est égale à  $\sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p}$

Calculer cette somme et conclure que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , coef Dominant de  $T_n = 2^{n-1}$

**Exercice 4.** On vérifie facilement  $\cos[n\theta] = 2 \cos\theta \cos[(n+1)\theta] - \cos[(n+2)\theta]$

En déduire avec le théorème de rigidité que :  $T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n$

**Exercice 5.** Finir le calcul suivant :  $T_n(-\cos\theta) = T_n(\cos(\theta + \pi)) = \cos(n(\theta + \pi)) = \dots$

En déduire avec le théorème de rigidité que :  $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$

### 2.1.3 Construction par récurrence des polynômes $T_n$ .

On considère la suite de polynôme :  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = X$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n$

Grâce cette relation de récurrence et avec des récurrences doubles, on démontre

> Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

> Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : Le polynôme  $T_n$  est de degré  $n$  et pour  $n \geq 1$ , sont coef dominant c'est  $2^{n-1}$

> Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$

> On a aussi (moins classique) : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cosh(x)) = \cosh(nx)$

> On a aussi (moins classique) : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ ,  $T_n\left(\frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right]\right) = \frac{1}{2}\left[z^n + \frac{1}{z^n}\right]$

Rq : Lorsque qu'on applique avec  $z = e^{i\theta}$ , on obtient .....

Rq : Lorsque qu'on applique avec  $z = e^x$ , on obtient .....

### 2.1.4 Lien entre les deux constructions.

À cause de l'unicité, les polynômes construits dans les sections 2 et 3 sont les mêmes!!!

Cependant, on a aussi

#### Directe $\rightsquigarrow$ Récurrence

C'est l'exercice 2.

#### Récurrence $\rightsquigarrow$ Directe

Lorsque  $X \in [-1, 1]$ , on peut écrire  $X = \cos(\theta)$ .

La suite  $T_n(\cos(\theta))$  vérifie la relation de récurrence d'ordre 2,

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta) T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))$$

> La racine de l'équation caractéristique sont  $r = e^\theta$  et  $\bar{r} = e^{-\theta}$

> On trouve avec l'initialisation :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n(\cos(\theta)) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \operatorname{Re}\left(e^{in\theta}\right)$

Conclusion : On a bien retrouvé le calcul de la section 2! yes!!!!

## 2.2 Exemples de problèmes avec Chebychev

### 2.2.1 Un exemple de PB de concours

La partie 1 : Présentation alternative des Chebychev, Partie 2 : Optimalité des Chebychev (intéressant)

**Exercice 6.** [Correction] On considère la fonction  $T_n$  définie par

$$\forall x \in [-1, 1], T_n(x) = \cos[n \arccos(x)].$$

**PARTIE I** Étude de la famille de fonction  $T_n$ .

Les question intéressantes sont 3.a; 4.b.

- Déterminer l'ensemble de définition, continuité et dérivabilité de  $T_n$ .
- Calculer  $T_0, T_1$  et  $T_2$ .
- Détermination des  $T_n$ .
  - Montrer que  $\cos(n\theta)$  s'exprime à l'aide de  $\cos\theta$ . (Partir de  $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta})$ .)
  - En déduire que  $T_n$  est la restriction sur  $[-1, 1]$  d'une fonction polynômiale (que l'on notera aussi  $T_n$ ) que l'on déterminera.
  - Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n$  est de degré  $n$  et son coefficient dominant est égale à  $2^{n-1}$ .
- Propriété caractéristique des  $T_n$ .
  - Montrer que  $\forall \theta \quad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ .
  - Montrer que  $T_n$  est l'unique polynôme vérifiant  $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ .

**PARTIE II** Un Jolie Propriété.

On suppose que  $n$  est pair et on pose  $n = 2p$ .

- Cette question qui sans être difficile est un peu lourde à rédiger donc à méditer ....

Montrer que les équations  $T_n(X) = 1$  et  $T_n(X) = -1$  admettent respectivement  $p + 1$  solutions et  $p$  solution dans  $[-2, 2]$ . On les note **par ordre décroissant**  $x_0, \dots, x_p$  et  $y_0, \dots, y_{p-1}$ . Vérifier de plus que

$$-1 = x_p < y_{p-1} < x_{p-1} < \dots < x_1 < y_0 < x_0 = 1.$$

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[-1, 1]$  telle que

$$\forall x \in [-1, 1], |f(x)| < 1.$$

Montrer que  $f - T_n$  s'annule au moins  $n$  fois sur  $[-1, 1]$ .

- Montrer qu'il n'existe pas de polynôme  $Q$  unitaire de degré  $n = 2p$  tel que

$$\forall x \in [-1, 1], |Q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

- Est ce que l'hypothèse  $n = 2p$  est indispensable ?

## 2.2.2 Une utilisation de Chebychev

### Exercice 7. PROBLEME

On admet les résultats suivants sur les polynômes de Chebychev

— Il existe un unique polynôme  $T_n = 2^{n-1}X^n + \dots$  ( $T_n$  est de degré  $n$ ) tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

— Les  $n$  racines du polynôme  $T_n$  sont les  $n$  réels  $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{2n}\right)$  avec  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . On a ainsi

$$T_n = 2^{n-1} (X - x_0)(X - x_1) \dots (X - x_{n-1})$$

— On notera enfin que l'on a

$$-1 < x_{n-1} < x_{n-2} < \dots < x_1 < x_0 < 1$$

### Début du problème.

Soit  $P$  un polynôme de degré  $\leq n-1$  fixé vérifiant

$$\left[ \forall x \in [-1, 1], \quad \sqrt{1-x^2} |P(x)| \leq 1 \right]$$

1. Un petit calcul.

(a) Calculer  $T'_n$  de deux façons différentes.

(b) En déduire que

$$T'_n(x_k) = 2^{n-1} (x_k - x_0) \dots \widehat{(x_k - x_k)} \dots (x_k - x_{n-1}) = (-1)^k \frac{n}{\sqrt{1-x_k^2}}$$

2. Montrer que

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k) \frac{T_n}{T'_n(x_k)(X - x_k)}.$$

3. En déduire que  $\forall x \in [-1, 1] - \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$

$$|P(x)| \leq \frac{|T_n(x)|}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{|x - x_k|}$$

4. Soit  $x \in [-1, x_n[\cup]x_0, 1]$  fixé.

Comme  $x \in [-1, 1]$ , on sait qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $x = \cos \alpha$

(a) Pourquoi a-t-on ?

$$|P(x)| \leq \frac{|T_n(x)|}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - x_k} \right|$$

(b) Montrer que

$$|P(x)| \leq \frac{1}{n} |T'_n(x)| = \left| \frac{\sin(n\alpha)}{\sin \alpha} \right|$$

(c) Montrer que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |\sin(n\theta)| \leq n |\sin(\theta)|.$$

*Remarque : Il y a plein de valeur absolue donc une méthode variationnelle n'est pas très indiquée.*

(d) Que peut-on conclure ?

5. Soit  $x \in [x_n, x_0] = \left[-\cos \frac{\pi}{2n}, +\cos \frac{\pi}{2n}\right]$  fixé.

Montrer que

$$|P(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} \leq n$$

On a finalement démontré l'inégalité de Schur (1919)

Soit  $P$  un polynôme de degré  $\leq n-1$  fixé. On a

$$\left[ \forall x \in [-1, 1], \sqrt{1-x^2} |P(x)| \leq 1 \right] \Rightarrow \left[ \forall x \in [-1, 1], |P(x)| \leq n \right]$$

A méditer : Chacun pourra essayer de voir où, dans ce problème, intervient la théorie des polynômes.

### 2.2.3 Problème sur les polynôme très formateur et Chebychev intervient discrètement en partie 3

**Exercice 8. [Correction]** Soient  $n, d \in \mathbb{N}^*$ .

On note  $\mathbb{U}_n = \{w_k = e^{ik2\pi/n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$  et  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .

Le but de ce problème est d'étudier les coefficients d'un polynôme complexe  $P(X) = \sum_{j=0}^d a_j X^j$  de degré  $d$  (donc  $a_d \neq 0$ ) à partir des valeurs qu'il prend sur  $\mathbb{U}_n$ .

#### Partie 1 : Majoration des coefficients

1. Pour  $q \in \mathbb{Z}$ , montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{w \in \mathbb{U}_n} w^q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} w_k^q = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ divise } q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. En déduire que pour  $k \in \{0, 1, \dots, d\}$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{w \in \mathbb{U}_n} P(w) w^{-k} = \sum_{\substack{j \in \{0, 1, \dots, d\} \\ \text{et } j \equiv k \pmod{n}}} a_j$$

3. On suppose que  $n > d$ . On fixe  $k \in \{0, 1, \dots, d\}$ .

(a) Établir l'égalité :  $\frac{1}{n} \sum_{w \in \mathbb{U}_n} P(w) w^{-k} = a_k$ .

(b) En déduire l'inégalité :  $|a_k| \leq \max\{|P(w)|, w \in \mathbb{U}_n\}$ .

4. Justifier l'existence de  $M(P) = \sup\{|P(z)|, z \in \mathbb{U}\}$ .

Montrer que :  $\forall k \in \{0, 1, \dots, d\}, |a_k| \leq M(P)$

#### Partie 2 : Une majoration plus forte

On montre ici une majoration plus forte que celle de la première partie

$$\sum_{k=0}^d |a_k|^2 \leq [M(P)]^2$$

Soient  $\bar{P}$  le polynôme conjugué de  $P$  et  $Q(X) = X^d P(X) \bar{P}\left(\frac{1}{X}\right)$ .

1. Montrer que  $Q$  est un polynôme et que le coefficient devant  $X^d$  vaut  $\sum_{k=0}^d |a_k|^2$ .

2. Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{U}$ ,  $|Q(z)| = |P(z)|^2$ .

3. Comparer alors  $M(Q)$  et  $M(P)$  puis montrer l'inégalité.

**Partie 3 : Minoration de  $\sup\{|P(t)|, t \in [-1, 1]\}$  pour  $P$  unitaire de degré  $d$**

On note  $\mathcal{N}_d$  l'ensemble des polynômes complexes normalisés (ou unitaires) de degré  $d$ , c'est à dire de coefficient dominant  $a_d = 1$ .

On fixe  $P \in \mathcal{N}_d$ .

1. Établir l'inégalité  $1 \leq M(P)$ . Quand y-a-t-il égalité ?
2. Justifier l'existence de  $N(P) = \sup\{|P(t)|, t \in [-1, 1]\}$ .
3. Les polynômes de Chebychev sont définis par récurrence par :

$$T_0(X) = 1, T_1(X) = X \text{ et } \forall d \in \mathbb{N}, T_{d+2}(X) = 2XT_{d+1}(X) - T_d(X)$$

- (a) Pour  $d \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,  $T_d(\cos(t)) = \cos(dt)$ .
- (b) Trouver le degré et le coefficient dominant de  $T_d$  pour  $d \geq 1$ .
- (c) Déterminer les racines de  $T_d$ . En déduire que  $T_d$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- (d) Pour  $d \geq 1$ . On note  $\mathcal{S}_d(X) = \frac{1}{2^{d-1}} T_d(X)$ .

$$\text{Vérifier que } \mathcal{S}_d \in \mathcal{N}_d \text{ et que } N(\mathcal{S}_d) = \frac{1}{2^{d-1}}.$$

4. On prouve ici que, pour tout  $P \in \mathcal{N}_d$ ,  $N(P) \geq \frac{1}{2^{d-1}}$ .

- (a) On note  $R(X) = X^d P\left(\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right)\right)$ .

Montrer que  $R$  est un polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

- (b) Montrer que  $M(R) = N(P)$ .

- (c) Calculer  $\sum_{w \in \mathbb{U}_{2d}} R(w)$  (Utiliser la question Q1.2) et conclure que  $N(P) \geq \frac{1}{2^{d-1}}$ .

## 2.2.4 Centrale MP 2013 (très dispensable même si le résultat est sympa)

### Exercice 9. [Correction] Le théorème de Théorème de Block-Thielmann

L'objectif de cet exercice est de caractériser les familles de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  qui satisfont les conditions  $\mathcal{C}$  ci-dessous :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* & \deg(P_n) = n \\ \forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 & P_n \circ P_m = P_m \circ P_n \end{cases}$$

où  $\circ$  désigne la composition (des polynômes).

### Partie A - Préliminaires

1. Montrer que la famille  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  satisfait les conditions  $\mathcal{C}$ .
2. (a) Montrer qu'il existe une unique famille  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* & \deg(T_n) = n \\ \forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} & T_n(\cos(x)) = \cos(nx) \end{cases}$$

- (b) Montrer que  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  satisfait les conditions  $\mathcal{C}$ .
3. On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des polynômes de degré égale à 1.

Montrer que l'ensemble  $\mathcal{E}$  est stable par composition.

Montrer que Si  $A \in \mathcal{E}$  alors la fonction  $A$  est bijective et  $A^{-1}$  sa bijection réciproque appartient à  $\mathcal{E}$

### Partie B - Caractérisation

Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une famille de polynômes vérifiant les conditions  $\mathcal{C}$ .

1. Établir l'existence du polynôme  $A$  de degré 1 et d'un réel  $a$  tels que

$$A \circ P_2 \circ A^{-1} = X^2 + a.$$

2. Montrer que la famille  $(Q_n = A \circ P_n \circ A^{-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  satisfait les conditions  $\mathcal{C}$  et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Q_n$  est unitaire.  
Rq : On a donc  $Q_2 = X^2 + a$

3. En calculant  $Q_2 \circ Q_3$ , montrer que  $a \in \{0, -2\}$ .

4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Montrer, par l'absurde, qu'il n'y a qu'un seul polynôme unitaire de degré  $n$  qui commute avec  $Q_2$ .

5. (a) Supposons  $a = 0$ . Calculer  $Q_n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (b) Supposons  $a = -2$ . Trouver  $B$  un polynôme de degré 1 tel que

$$B \circ T_2 \circ B^{-1} = Q_2$$

En déduire la suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

6. Conclure.

**Solution de l'exercice 1 (Énoncé)**

1. On a

$$P_2 = \frac{(P_1)^2 - 1}{P_0} = X^2 - 1 \text{ et } P_3 = \frac{(P_2)^2 - 1}{P_1} = \frac{(X^2 - 1)^2 - 1}{X} = X(X^2 - 2)$$

2. On démontre par une récurrence à deux étages.

$$H\langle k \rangle : P_k \text{ est de degré } k, \text{ i.e. } P_k = \underbrace{a_k}_{\neq 0} X^k + \dots$$

Initialisation :  $H\langle 0 \rangle, H\langle 1 \rangle$  OK

Hérédité. On suppose  $H\langle k-1 \rangle$  et  $H\langle k \rangle$

$$\text{D'après } H\langle k-1 \rangle \text{ et } H\langle k \rangle, \text{ on sait que } P_{k-1} = \underbrace{a}_{\neq 0} X^{k-1} + \dots \text{ et } P_k = \underbrace{b}_{\neq 0} X^k + \dots$$

$$\text{De plus, on sait que } P_{k+1} \text{ est un polynôme non nul, i.e. } P_{k+1} = \underbrace{c}_{\neq 0} X^{k+1} + \dots$$

$$\begin{aligned} (P_k)^2 &= 1 + P_{k+1} P_{k-1} \\ \iff [bX^k + \dots]^2 &= 1 + (cX^{k+1} + \dots)(aX^{k-1} + \dots) \\ \text{Ainsi } \underbrace{b^2}_{\neq 0} X^{2k} &= \underbrace{a.c}_{\neq 0} X^{k-1+k} \end{aligned}$$

Conclusion :  $k-1+\alpha = 2k \iff \alpha = k+1$ , CàD le poly  $P_{k+1}$  est de degré  $k+1$

3. Soit  $a$  une racine réelle ou complexe de  $P_{n-1}$ .

(a)

→ On évalue  $(E_n)$  en  $a$  et on en déduit  $P_{n-2}^2(a) = 1$ .

→ On évalue  $(E_{n-1})$  en  $a$  et on en déduit, puis  $0 = 1 + P_n(a) P_{n-2}(a)$ . On multiplie par  $P_{n-2}(a)$  et on a

$$0 = P_{n-2}(a) + P_n(a) \underbrace{P_{n-2}^2(a)}_{=1} = P_{n-2}(a) + P_n(a).$$

D'où le résultat.

(b) On a facilement

$$[(P_n)^2 - 1](a) = P_n(a)^2 - 1 = P_{n-2}^2(a) - 1 = 0$$

Donc  $a$  est racine de  $(P_n)^2 - 1$ .

4.

(a) Fixons les notations du texte.

$$\exists A \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P_{n-1}(X) = (X-a)^q A(X) \text{ et } A(a) \neq 0.$$

$$\exists B \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P_n(X) = e + (X-a)^r B(X) \text{ et } B(a) \neq 0.$$

$$\exists C \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P_{n-2}(X) = -e + (X-a)^s C(X) \text{ et } C(a) \neq 0.$$

On suppose que  $r < q$ .

(b) On a

$$\begin{aligned} (P_n)^2 - 1 &= [e + (X-a)^r B(X)]^2 - 1 \\ &= \underbrace{e^2}_{=1} + 2e(X-a)^r B(X) + [(X-a)^r B(X)]^2 - 1 \\ &= (X-a)^r \underbrace{[2eB(X) + (X-a)B^2(X)]}_{\text{Polynôme qui ne s'annule pas en } a} \end{aligned}$$

Donc  $r$  est la multiplicité exacte de  $a$  dans le polynôme  $(P_n)^2 - 1$ .

(c) On suppose que  $r < s$ .

i. De même par transmission, on a

$$\begin{aligned} 1 + P_n P_{n-2} &= 1 + [e + (X-a)^r B(X)] [-e + (X-a)^s C(X)] \\ &= (X-a)^r \underbrace{[-eB + e(X-a)^{s-r} C + (X-a)^s C.B]}_{=R \text{ Polynôme qui ne s'annule pas en } a} \end{aligned}$$

Donc  $r$  est la multiplicité exacte de  $a$  dans le polynôme  $1 + P_n P_{n-2}$ .

ii. On a

$$\begin{aligned} (E_{n-1}) &\Leftrightarrow (P_{n-1})^2 = 1 + P_n P_{n-2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (X-a)^{2q} A^2(X) = (X-a)^r R(X) \\ \text{ET} \\ A(a) \neq 0 \text{ et } R(a) \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $2q = r < q$ . Absurde.

(d) On suit la même démarche. On trouve que  $s$  est la multiplicité exacte de  $a$  dans le polynôme  $1 + P_n P_{n-2}$  puis que  $q = s < r$ . Absurde.

(e) On a donc  $r = s$ .

$$(E_{n-2}) \Leftrightarrow (P_{n-2})^2 = 1 + P_{n-1} P_{n-3} \Leftrightarrow (P_{n-2})^2 - 1 = P_{n-1} P_{n-3}$$

— La multiplicité exacte de  $a$  dans  $(P_{n-2})^2 - 1$  est égale à  $s = r$ . (cf : Question 3.b)

— La multiplicité de  $a$  dans  $P_{n-1} P_{n-3}$  est  $\geq$  à  $q$ .

Conclusion  $q \leq r$ . Absurde.

(f) On a donc  $r \geq q$ , i.e. la multiplicité de  $a$  dans  $(P_n)^2 - 1$  est  $\geq$  la multiplicité de  $a$  dans  $P_{n-1}$ .

Ceci est vrai pour toutes les racines ( $a$  est fixé qcq) donc  $P_{n-1}$  divise  $(P_n)^2 - 1$ .

Ainsi  $P_{n+1}$  est bien un polynôme.

**Solution de l'exercice 2 (Énoncé)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On appelle polynôme trigonométrique (réel) de degré  $n$  une fonction de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \dots + \alpha_n \cos nx + \beta_1 \sin x + \dots + \beta_n \sin nx \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)) \end{aligned}$$

où  $(\alpha_0, \dots, \beta_n)$  sont des réels et  $(\alpha_n, \beta_n) \neq (0, 0)$ .

### Partie A

Soit  $f$  un polynôme trigonométrique (réel) de degré  $n$  fixé.

1. Présentation de  $f$  via les polynômes.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme à coefficient dans  $\mathbb{C}$ , CàD  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\forall x, f(x) = e^{-inx} P(e^{ix})$

$$\begin{aligned} \text{On a } f(x) &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)) \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \left( \alpha_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + \beta_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2} e^{ikx} + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} e^{-ikx} \\ &= e^{-inx} \left[ \alpha_0 e^{inx} + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2} e^{i(n+k)x} + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} e^{i(n-k)x} \right] \\ &= e^{-inx} \left[ \alpha_0 e^{inx} + \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{\alpha_{p-n} - i\beta_{p-n}}{2} e^{ipx} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n-p} + i\beta_{n-p}}{2} e^{ipx} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion } P(X) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n-p} + i\beta_{n-p}}{2} X^p + \alpha_0 X^n + \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{\alpha_{p-n} - i\beta_{p-n}}{2} X^p = \text{convient}$$

Dans la suite, je note  $a_k$  les coefficients de  $P$ .

De plus vérifier que  $P$  est de degré  $2n$  et expliciter ses coefficients en fonction des  $\alpha_i$  et  $\beta_i$

Le coefficient de  $X^{2n}$  vaut  $\frac{\alpha_n - i\beta_n}{2} \neq 0$  car  $(\alpha_n, \beta_n) \neq (0, 0)$ .

Donc  $P$  est de degré  $2n$  et il suffit de lire les coefficients

(b) Justifier que le polynôme  $P$  est unique (ainsi les coefficients  $a_k$  sont uniques)

On suppose que :  $\forall x, f(x) = e^{-inx} P_1(e^{ix}) = e^{-inx} P_2(e^{ix})$

Donc  $\forall x, P_1(e^{ix}) = P_2(e^{ix})$

Les polynômes  $P_1$  et  $P_2$  coïncident sur une infinités de valeurs donc ils sont égaux

En déduire que l'écriture d'un polynôme trigonométrique est unique.

On a  $a_{n+k} = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}$  et  $a_{n-k} = \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2}$

Donc  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  s'expriment en fonction de  $a_{n+k}$  et  $a_{n-k}$  et donc sont uniques

(c) Vérifier que  $P(0) \neq 0$  et que  $\forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\}, \overline{a_k} = a_{2n-k}$

On a  $P(0) = \frac{\alpha_n + i\beta_n}{2} \neq 0$  car  $(\alpha_n, \beta_n) \neq (0, 0)$ .

$$\text{ET } a_{n+k} = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2} = \frac{\overline{\alpha_k + i\beta_k}}{2} = \overline{a_{n-k}}$$

Conclusion :  $\forall p \in \{0, 1, \dots, 2n\}, \overline{a_p} = \overline{a_{n-k}} = a_{n+k} = a_{2n-p}$

2. Sur les racines de  $P$ .

(a) Montrer que :  $\overline{P}(X) = X^{2n} P\left(\frac{1}{X}\right)$

$$\begin{aligned} \text{On a } \overline{P}(X) &= \sum_{k=0}^{2n} \overline{a_k} X^k = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k \\ &= \sum_{p=0}^{2n} a_p X^{2n-p} \\ &= X^{2n} \sum_{p=0}^{2n} a_p \frac{1}{X^p} = X^{2n} P\left(\frac{1}{X}\right) \end{aligned}$$

(b) En déduire que si  $z_0$  est une racine de  $P$  de multiplicité exactement  $m$

alors  $\frac{1}{\overline{z_0}}$  est aussi une racine de  $P$  de multiplicité exactement  $m$ .

Comme  $z_0$  est une racine de  $P$  de multiplicité exactement  $m$ , on a  $P(X) = (X - z_0)^m Q_1(X)$  et  $Q_1(z_0) \neq 0$

$$\text{ET } \overline{P}(X) = X^{2n} P\left(\frac{1}{X}\right) \implies P(X) = \overline{\overline{P}(X)} = X^{2n} \overline{\overline{P}\left(\frac{1}{X}\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{On va } P(X) &= X^{2n} \overline{\overline{P}\left(\frac{1}{X}\right)} \\ &= X^{2n} \left(\frac{1}{X} - \overline{z_0}\right)^m \overline{Q_1\left(\frac{1}{X}\right)} \\ &= X^{2n-m} (1 - X)^m \overline{Q_1\left(\frac{1}{X}\right)} \\ &= \left(X - \frac{1}{\overline{z_0}}\right)^m X^{2n-m} \frac{1}{(\overline{z_0})^m} \overline{Q_1\left(\frac{1}{X}\right)} = \left(X - \frac{1}{\overline{z_0}}\right)^m Q_2(X) \end{aligned}$$

Comme  $Q_1$  est un polynôme de degré  $(2n-m)$  alors  $Q_2(X) = X^{2n-m} \frac{1}{(\overline{z_0})^m} \overline{Q_1\left(\frac{1}{X}\right)}$  est bien un polynôme.

Donc Yes

(c) Justifier que :  $z_0 = \frac{1}{\overline{z_0}} \iff |z_0| = 1$

$$\text{On a } z_0 = \frac{1}{\overline{z_0}} \iff z_0 \cdot \overline{z_0} = 1 \iff |z_0|^2 = 1 \iff |z_0| = 1$$

Conclusion : Les racines de  $P$  sont

> Soit que module 1, CàD  $e^{i\theta_k}$

> Soit elles vont par paire, CàD  $z_0$  et  $\frac{1}{\overline{z_0}}$

Ainsi  $P$  peut se factoriser sous la forme  $P(X) = \lambda \cdot \underbrace{\prod_{k=1}^p (X - e^{i\theta_k})^{\alpha_k}}_{=A(X)} \cdot \underbrace{\prod_{k=1}^q \left[ (X - z_k) \left( X - \frac{1}{\overline{z_k}} \right) \right]^{\beta_k}}_{=B(X)}$

On suppose dans cette partie que  $f$  est un polynôme trigonométrique réel, de degré  $n$  et Positif, CàD  $\forall x, f(x) \geq 0$ .  
On vient de voir que  $f(x) = e^{-inx} P(e^{ix})$  et  $P(X) = \lambda.A(X).B(X)$ .

1. Soit  $e^{i\theta_0}$  une racine de  $A(X)$  de multiplicité  $\alpha_0$ .

(a) Montrer que :  $f(x) = \left[ \sin\left(\frac{x-\theta_0}{2}\right) \right]^{\alpha_0} g(x)$  où  $g$  est  $C^0$  et  $g(\theta_0) \neq 0$ .

$$\text{On a avec l'argument moitié, } e^{ix} - e^{i\theta_0} = e^{ix/2} e^{i\theta_0/2} \left[ 2i \sin\left(\frac{x-\theta_0}{2}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } f(x) &= e^{-inx} \lambda \cdot \left( e^{ix} - e^{i\theta_0} \right)^{\alpha_0} \cdot \prod_{\text{les Autres}} \left( e^{ix} - e^{i\theta_k} \right)^{\alpha_k} \cdot \prod_{k=1}^q \left[ \left( e^{ix} - z_k \right) \left( e^{ix} - \frac{1}{\bar{z}_k} \right) \right]^{\beta_k} \\ &= \left[ \sin\left(\frac{x-\theta_0}{2}\right) \right]^{\alpha_0} g(x) \end{aligned}$$

$$\text{avec } g(x) = e^{-inx} \lambda \cdot \prod_{\text{les Autres}} \left( e^{ix} - e^{i\theta_k} \right)^{\alpha_k} \cdot \prod_{k=1}^q \left[ \left( e^{ix} - z_k \right) \left( e^{ix} - \frac{1}{\bar{z}_k} \right) \right]^{\beta_k} \text{ est } C^0 \text{ et } g(\theta_0) \neq 0$$

(b) Que peut-on en déduire que  $\alpha_0$  est un entier pair.

Si  $\alpha_0$  est un entier impair alors la fonction  $f$  change de signe en  $\theta_0$

OUPS car  $f$  est positive.

Conclusion :  $\alpha_0$  est un entier pair.

2. Montrer que  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \left( e^{i\theta} - z_k \right) \left( e^{i\theta} - \frac{1}{\bar{z}_k} \right) = -\frac{e^{i\theta}}{\bar{z}_k} \left| e^{i\theta} - z_k \right|^2$  et  $\left( e^{i\theta} - e^{i\theta_k} \right)^2 = -e^{i\theta} e^{i\theta_k} \left| e^{i\theta} - e^{i\theta_k} \right|^2$

$$\begin{aligned} \left( e^{i\theta} - z_k \right) \left( e^{i\theta} - \frac{1}{\bar{z}_k} \right) &= \left( e^{i\theta} - z_k \right) \frac{e^{i\theta}}{\bar{z}_k} \left( \bar{z}_k - e^{-i\theta} \right) \\ &= \frac{e^{i\theta}}{\bar{z}_k} \left( e^{i\theta} - z_k \right) \left( \bar{z}_k - e^{-i\theta} \right) \\ &= \frac{e^{i\theta}}{\bar{z}_k} \left( e^{i\theta} - z_k \right) \ominus \overline{\left( e^{i\theta} - z_k \right)} = -\frac{e^{i\theta}}{\bar{z}_k} \left| e^{i\theta} - z_k \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( e^{i\theta} - e^{i\theta_k} \right)^2 &= \left( e^{i\theta} - e^{i\theta_k} \right) \left( e^{i\theta} - e^{i\theta_k} \right) \\ &= \left( e^{i\theta} - e^{i\theta_k} \right) e^{i\theta} e^{i\theta_k} \left( e^{-i\theta_k} - e^{-i\theta} \right) \\ &= e^{i\theta} e^{i\theta_k} \left( e^{i\theta} - e^{i\theta_k} \right) \overline{\left( e^{i\theta_k} - e^{i\theta} \right)} \\ &= e^{i\theta} e^{i\theta_k} \left( e^{i\theta} - e^{i\theta_k} \right) \ominus \overline{\left( e^{i\theta} - e^{i\theta_k} \right)} \\ &= -e^{i\theta} e^{i\theta_k} \left| e^{i\theta} - e^{i\theta_k} \right|^2 \end{aligned}$$

3. Dédurre de ce qui précédé que si  $f$  est un polynôme trigonométrique réel positif de degré  $n$ , alors il existe une polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left| Q\left(e^{ix}\right) \right|^2$

On a  $f(x) = e^{-inx} P(e^{ix})$

$$\begin{aligned} &= e^{-inx} \lambda \cdot \prod_{k=1}^p \left( e^{ix} - e^{i\theta_k} \right)^{2\alpha_k} \cdot \prod_{k=1}^q \left[ \left( e^{ix} - z_k \right) \left( e^{ix} - \frac{1}{\bar{z}_k} \right) \right]^{\beta_k} \\ &= e^{-inx} \lambda \cdot \prod_{k=1}^p \left( -e^{ix} e^{i\theta_k} \left| e^{ix} - e^{i\theta_k} \right|^2 \right)^{\alpha_k} \cdot \prod_{k=1}^q \left[ -\frac{e^{ix}}{\bar{z}_k} \left| e^{ix} - z_k \right|^2 \right]^{\beta_k} \\ &= \text{Konstante} \left| \prod_{k=1}^p \left( e^{ix} - e^{i\theta_k} \right)^{\alpha_k} \prod_{k=1}^q \left[ e^{ix} - z_k \right]^{\beta_k} \right|^2 \\ &= K \left| R\left(e^{ix}\right) \right|^2 \quad \text{avec } R\left(e^{ix}\right) = \prod_{k=1}^p \left( e^{ix} - e^{i\theta_k} \right)^{\alpha_k} \prod_{k=1}^q \left[ e^{ix} - z_k \right]^{\beta_k} \end{aligned}$$

Enfin  $K$  est un réel positif car  $f(x)$  et  $\left| R\left(e^{ix}\right) \right|^2$  sont deux réels positifs

$$\begin{aligned} \text{Conclusion : } K &= k^2 \text{ et } f(x) = k^2 \left| R\left(e^{ix}\right) \right|^2 = \left| Q\left(e^{ix}\right) \right|^2 \\ &\text{avec } Q = k.R\left(e^{ix}\right) \text{ Fini} \end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 6 (Énoncé)** On considère la fonction  $T_n$  définie par

$$T_n(x) = \cos[n \arccos(x)].$$

**PARTIE I** Étude de la famille de fonction  $T_n$ .

1. La fonction  $T_n$  est définie, continue sur  $[-1, 1]$ , dérivable et même  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$
2. Calcul de  $T_0, T_1$  et  $T_2$ . Soit  $x$  fixées dans  $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \cos(0) = 1. \\ T_1(x) &= \cos[\arccos(x)] = x \quad \text{car } \arccos(a) \text{ est une solution de l'équation } \cos(X) = a \\ T_2(x) &= \cos[2 \arccos(x)] \\ &\quad \text{formule trigo} \\ &= 2 \cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

3. Détermination des  $T_n$ .

(a) Classique, c'est presque du cours, on trouve

$$\cos n\theta = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p (\cos \theta)^{n-2p} (1 - \cos^2 \theta)^p$$

(b) Soit  $x$  fixées dans  $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \left[ \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p (\cos X)^{n-2p} (1 - \cos^2 X)^p \right] (\arccos x) \\ &\quad \text{Hors } \cos[\arccos(x)] = x \quad \text{car } \arccos(a) \text{ est une solution de l'équation } \cos(X) = a \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p x^{n-2p} (1 - x^2)^p \end{aligned}$$

Donc  $T_n$  est la restriction sur  $[-1, 1]$  d'une fonction polynômiale.

(c) Le résultat est classique mais ici le calcul est difficile.

$$\begin{aligned} > \text{Tout d'abord, on a } T_n(x) &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p x^{n-2p} (1 - x^2)^p = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p [(-1)^p x^n + \dots] \\ &= \left( \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} \right) x^n + \dots \end{aligned}$$

$$> \text{Reste à calculer } \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k}.$$

$$\text{C'est forcément avec la formule du binôme } (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

Si on veut regrouper les termes pairs, il faut que  $x^0 = x^2 = x^4 = \dots$ , on doit prendre  $x = 1$  ou  $x = -1$ .

$$\left. \begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow (1+1)^n = \sum_{k \text{ pair}} \dots + \sum_{k \text{ impair}} \dots \\ x = -1 &\Rightarrow (1-1)^n = \sum_{k \text{ pair}} \dots - \sum_{k \text{ impair}} \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}.$$

> Bonus autre méthode. On remarque que :  $\cos((n+2)\theta) = 2 \cos(\theta) \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$ ,  
ainsi on en déduit  $T_{n+2} = 2X T_{n+1} + T_n$ . Puis on ait une récurrence.

4. Propriété caractéristique des  $T_n$ .

(a) On fait le calcul direct

$$T_n(\cos\theta) = \left[ \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p x^{n-2p} (1-x^2)^p \right] (\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \quad \text{d'après Q3a}$$

(b) L'unicité et plus classique.

Soit  $P$  un polynôme tel que  $P(\cos\theta) = \cos n\theta$ . Ainsi le polynôme

$$\forall \theta, \quad [T_n - P](\cos\theta) = \cos n\theta - \cos n\theta = 0$$

Donc le polynôme  $[T_n - P]$  s'annule sur  $[-1, 1] \implies T_n - P = \hat{0}$

**PARTIE II.** Un Jolie Propriété.

On suppose que  $n$  est pair et on pose  $n = 2p$ .

1. La résolution de ces équations sont classiques. On trouve (*je suis près à expliquer*)

$$T_n(x) = 1 \iff x_k = \cos\left(0 + \frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{avec } k \in \{0, \dots, p\}$$

$$T_n(x) = -1 \iff x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{avec } k \in \{0, \dots, p-1\}$$

Comme Cosinus est croissante sur  $[0, \pi]$ , on a facilement

$$-1 = x_p < x_{p-1} < x_{p-2} < \dots < x_1 < y_0 < x_0 = 1.$$

2. On applique le TVI. sur  $[x_k, y_{k-1}]$  à la fonction  $\phi = f - T_n$

$$\left. \begin{array}{l} \phi \text{ est continue sur } [x_k, y_{k-1}] \\ \phi(x_k) = f(x_k) - 1 < 1 - 1 = 0 \\ \phi(y_{k-1}) = f(y_{k-1}) - (-1) > -1 + 1 = 0 \end{array} \right\} \implies \implies \exists c_k \in ]x_k, y_{k-1}[ \text{ tel que } [f - T_n](c) = 0$$

On fait de même sur  $[y_{k-1}, x_{k-1}]$ .

De plus les intervalles  $]x_k, y_{k-1}[$  et  $]y_{k-1}, x_{k-1}[$  sont 2 à 2 disjoints.

D'où les résultats car il y a  $n$  intervalles distincts.

3. On fait un RA. Soit  $Q$  un polynôme unitaire de degré  $n = 2p$  tel que

$$\forall x \in [-1, 1], |Q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On pose  $f(x) = 2^{n-1}Q(x)$ , ainsi  $f$  est fonction continue (polynomiale) avec

$$\forall x \in [-1, 1], |f(x)| = 2^{n-1}|Q(x)| < 1.$$

Ainsi d'après la question précédente

—  $f - T_n$  s'annule au moins  $n$  fois sur  $[-1, 1]$

—  $f - T_n$  est un polynôme et  $f - T_n = 2^{n-1}[X^n + \dots] - [2^{n-1}X^n + \dots] = \dots$  donc

$$\deg(f - T_n) \leq n - 1$$

$f - T_n$  est donc le polynôme nul, donc  $f = T_n \implies Q(x) = \frac{1}{2^{n-1}}f(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$  et on a

$$Q(x_0) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x_0) = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ Absurde car } \forall x \in [-1, 1], |Q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

**Solution de l'exercice 8 (Énoncé)**

**Partie 1 : Majoration des coefficients**

1. Pour  $q \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{w \in \mathbb{U}_n} w^q &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} w_k^q = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} w_1^{kq} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (w_1^q)^k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \square^k \quad \text{avec } \square = w_1^q \end{aligned}$$

On applique la formule des sommes géométrique Ssi  $\square \neq 1$

$$> \square = 1 \iff w_1^q = 1 \iff n \text{ divise } q$$

$$\text{on a alors } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \square^k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{1}{n} \times n = 1$$

$$> \text{Sinon } \square \neq 1 \iff w_1^q \neq 1 \iff n \text{ ne divise pas } q$$

$$\text{on a alors } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \square^k = \frac{1 - \square^n}{1 - \square} = \frac{1 - 1}{1 - \square} = 0$$

2. Pour  $k \in \{0, 1, \dots, d\}$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{w \in \mathbb{U}_n} P(w) w^{-k} &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} P(w_p) w_p^{-k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^d a_j w_p^j w_p^{-k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^d \underbrace{\left( \sum_{p=0}^{n-1} w_p^{j-k} \right)}_{=n \text{ Si } p-k \equiv 0[n] \text{ et } n \text{ sinon}} a_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{j \in \{0, 1, \dots, d\} \\ \text{et } j \equiv k \pmod{n}}} \binom{n}{j} a_j \\ &= \sum_{\substack{j \in \{0, 1, \dots, d\} \\ \text{et } j \equiv k \pmod{n}}} a_j \end{aligned}$$

3. On suppose que  $n > d$ . On fixe  $k \in \{0, 1, \dots, d\}$ .

(a) Comme  $n > d$  et  $k \in \{0, 1, \dots, d\}$ , on a  $j \equiv k \pmod{n} \iff j = k$

$$\text{on a } \frac{1}{n} \sum_{w \in \mathbb{U}_n} P(w) w^{-k} = \sum_{\substack{j \in \{0, 1, \dots, d\} \\ \text{et } j \equiv k \pmod{n}}} a_j = \underbrace{a_k}_{j=k}$$

(b) Je note  $\max = \max \{ |P(w)|, w \in \mathbb{U}_n \}$ . On a maintenant

$$\begin{aligned} |a_k| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n P(w_p) w_p^{-k} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \underbrace{|P(w_p)|}_{\leq \max} \underbrace{|w_p^{-k}|}_{=1} \leq \frac{1}{n} \max \times n = \max \end{aligned}$$

4. Comme  $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$ , on a  $\max \{ |P(w)|, w \in \mathbb{U}_n \} \leq M(P) = \sup \{ |P(z)|, z \in \mathbb{U} \}$ .

Ainsi :  $\forall k \in \{0, 1, \dots, d\}, |a_k| \leq \max \leq M(P)$

**Partie 2 : Une majoration plus forte :** On montre ici une majoration plus forte que celle de la première partie

$$\sum_{k=0}^d |a_k|^2 \leq [M(P)]^2$$

Soient  $\bar{P}$  le polynôme conjugué de  $P$  et  $Q(X) = X^d P(X) \bar{P}\left(\frac{1}{X}\right)$ .

1. On a facilement

$$P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

$$\bar{P}(X) = \sum_{k=0}^d \bar{a}_k X^k = \bar{a}_d X^d + \bar{a}_{d-1} X^{d-1} + \dots + \bar{a}_1 X + \bar{a}_0$$

$$X^d \bar{P}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^d \bar{a}_{d-k} X^k = \bar{a}_0 X^d + \bar{a}_1 X^{d-1} + \dots + \bar{a}_{d-1} X + \bar{a}_d$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } X^d \bar{P} \bar{P}(X) &= (a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_1 X + a_0) (\bar{a}_0 X^d + \bar{a}_1 X^{d-1} + \dots + \bar{a}_{d-1} X + \bar{a}_d) \\ &= \dots + X^d \underbrace{(\bar{a}_d a_d + \bar{a}_{d-1} a_{d-1} + \dots + \bar{a}_1 a_1 + \bar{a}_0 a_0)}_{=\sum_{k=0}^d |a_k|^2} + \dots \end{aligned}$$

2. On sait que pour tout  $z \in \mathbb{U}$ , on a  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$

Ainsi on a pour  $|z|=1$

$$\begin{aligned} |Q(z)| &= |z^d P(z) \bar{P}\left(\frac{1}{z}\right)| \\ &= |z|^d |P(z)| |\bar{P}(\bar{z})| \\ &= 1^d |P(z)| |\bar{P}(z)| \\ &\quad \text{Or on sait que } |\bar{\square}| = |\square| \\ &= |P(z)|^2 \end{aligned}$$

3. On a donc  $M(Q) \leq [M(P)]^2$

Ainsi d'après Q1.4, on a :  $\sum_{k=0}^d |a_k|^2 = \text{coef de } X^d \text{ dans } Q \leq M(Q) \leq [M(P)]^2$

**Partie 3 : Minoration de  $\sup\{|P(t)|, t \in [-1, 1]\}$  pour  $P$  unitaire de degré  $d$**

On note  $\mathcal{N}_d$  l'ensemble des polynômes complexes normalisés (ou unitaires) de degré  $d$ , c'est à dire de coefficient dominant  $a_d = 1$ .

On fixe  $P \in \mathcal{N}_d$ .

1. Facile avec Q1.4 car coefficient de  $X^d$  est égale à 1.

2. Ok

3. Classique la question 3c est à méditer.

4. On prouve ici que, pour tout  $P \in \mathcal{N}_d$ ,  $N(P) \geq \frac{1}{2^{d-1}}$ .

(a) On note  $R(X) = X^d P\left(\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right)\right) = \sum_{k=0}^d a_k X^d \square^k$  avec  $\square = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right)$  et  $a_d = 1$

> Pour  $k \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ , on a  $X^d \square^k = \frac{X^d}{2^k} \left(X + \frac{1}{X}\right)^k = \frac{1}{2^k} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} X^{d+k-2p}$

est une somme de monôme  $X^k$  avec  $0 < d+k-2p < 2d$

> et  $X^d \square^k = \frac{X^d}{2^d} \left(X + \frac{1}{X}\right)^k = \frac{1}{2^d} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} X^{2d-2p}$

est un polynôme de la forme  $\frac{1}{2^d} X^{2d} + \dots + \frac{1}{2^d} X^0$

Ainsi  $R$  est un polynôme de degré  $2d$  de la forme  $\frac{1}{2^d} X^{2d} + \dots + \frac{1}{2^d} X^0$ .

(b) On a  $R(e^{i\theta}) = e^{id\theta} P\left(\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right) = e^{id\theta} P(\cos\theta)$

Ainsi on a  $M(R) = N(P)$ , en passant au V.A. et au sup.

(c) Avec la question Q1.2, on a

$$\sum_{w \in \mathbb{U}_{2d}} R(w) = \sum_{w \in \mathbb{U}_{2d}} R(w) w^{-0} = \sum_{\substack{j \in \{0, 1, \dots, 2d\} \\ \text{et } j \equiv 0 \pmod{2d}}} a_j = a_0 + a_{2d} = \frac{1}{2^d} + \frac{1}{2^d} = \frac{1}{2^{d-1}}$$

En suivant la même démarche qu'à la question Q1.3b et Q1.4, on a

$$\frac{1}{2^{d-1}} = \sum_{w \in \mathbb{U}_{2d}} R(w) = \sum_{w \in \mathbb{U}_{2d}} R(w) w^{-0} \leq M(R) = N(P)$$

Yes

**Solution de l'exercice 9 (Énoncé)** L'objectif de cet exercice est de caractériser les familles de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  qui satisfont les conditions  $\mathcal{C}$  ci-dessous :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* & \deg(P_n) = n \\ \forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 & P_n \circ P_m = P_m \circ P_n \end{cases}$$

où  $\circ$  désigne la composition (des polynômes).

## Partie A - Préliminaires

1. Montrer que la famille  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  satisfait les conditions  $\mathcal{C}$ .

Facile car  $X^n \circ X^m = X^{n \cdot m} = X^m \circ X^n$

2. Les polynôme de Chebychev

C'est du cours ou presque donc RAS

3. On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des polynômes de degré égale à 1.

Montrer que l'ensemble  $\mathcal{E}$  est stable par composition.

On suppose que  $P, Q \in \mathcal{E}$  ainsi il existe  $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$  tq  $P = aX + b$  et  $Q = a'X + b'$  avec  $a \neq 0$  et  $a' \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{On a } P \circ Q &= a(a'X + b') + b \\ &= \underbrace{a \cdot a'}_{\neq 0} X + a \cdot b' + b \end{aligned}$$

Conclusion :  $P \circ Q$  est bien un polynôme de degré 1, donc  $\mathcal{E}$  est stable par composition.

Montrer que Si  $A \in \mathcal{E}$  alors la fonction  $A$  est bijective et  $A^{-1}$  sa bijection réciproque appartient à  $\mathcal{E}$

**Solution classique**

On justifie  $A$  bijective avec thm de la bijection monotone

Puis on calcule  $A^{-1}$  avec  $A(x) = b \iff \dots \iff x = \underbrace{\text{Expression de } b}_{=A^{-1}(b)}$

**Solution Astucieuse** Avec le calcul ci-dessus, on peut deviner  $A^{-1}$

La fonction  $A \in \mathcal{E}$ , ainsi il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$\text{Je choisis } B = \frac{1}{a}X + \frac{-b}{a}$$

On a  $A \circ B = X$  et  $B \circ A = X$

Conclusion :  $A$  est bijective et  $A^{-1} = B = \frac{1}{a}X + \frac{-b}{a}$

## Partie B - Caractérisation

Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une famille de polynômes vérifiant les conditions  $\mathcal{C}$ .

1. Établir l'existence du polynôme  $A$  de degré 1 et d'un réel  $a$  tels que  $A \circ P_2 \circ A^{-1} = X^2 + a$ .

Comme la famille  $(P_n)$  vérifie les conditions  $\mathcal{C}$ , on peut écrire  $P_2 = aX^2 + bX + c$  avec  $a \neq 0$

Soit  $A \in \mathcal{E}$ , on peut écrire  $A = \alpha X + \beta$  avec  $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{On a } A \circ P_2 \circ A^{-1} &= \left[ \alpha \left( aX^2 + bX + c \right) + \beta \right] \circ A^{-1} \\ &= \left[ \alpha \cdot aX^2 + \alpha \cdot bX + \alpha \cdot c + \beta \right] \circ \left[ \frac{1}{\alpha}X + \frac{-\beta}{\alpha} \right] \\ &= \alpha \cdot a \left( \frac{1}{\alpha}X + \frac{-\beta}{\alpha} \right)^2 + \alpha \cdot b \left( \frac{1}{\alpha}X + \frac{-\beta}{\alpha} \right) + \alpha \cdot c + \beta \\ &= X^2 \left[ \frac{a}{\alpha} \right] + X [-2a \cdot \beta + b] + X^0 [Bof] \end{aligned}$$

Conclusion : Je choisis  $\alpha = a \neq 0$  et  $\beta = -\frac{b}{2a}$ .

Le polynôme  $A = \alpha X + \beta \in \mathcal{E}$  et convient

2. Montrer que la famille  $(Q_n = A \circ P_n \circ A^{-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  satisfait les conditions  $\mathcal{C}$

Facile

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Q_n$  est unitaire.

Comme  $\deg(Q_n) = n$ , on peut écrire  $Q_n = a_n X^n + \dots$  avec  $a_n \neq 0$

$$Q_2 \circ Q_n = (X^2 + a) \circ (a_n X^n + \dots) = a_n^2 X^{2n} + \dots$$

On a maintenant *et*

$$Q_n \circ Q_2 = (a_n X^n + \dots) \circ (X^2 + a) = a_n X^{2n} + \dots$$

Comme  $Q_2 \circ Q_n = Q_n \circ Q_2$ , on a  $a_n^2 = a_n$  donc  $a_n = 0$  ou  $a_n = 1$

Conclusion : Comme  $a_n \neq 0$ , on a forcément  $a_n = 1$ , CàD le polynôme  $Q_n$  est unitaire

3. En calculant  $Q_2 \circ Q_3$ , montrer que  $a \in \{0, -2\}$ .

Comme  $\deg(Q_3) = 3$  et est unitaire, on peut écrire  $Q_3 = X^3 + uX^2 + vX + w$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi on a } Q_2 \circ Q_3 &= (X^2 + a) \circ (X^3 + uX^2 + vX + w) \\ &= (X^3 + uX^2 + vX + w)^2 + a \\ &= X^6 + X^5(2u) + X^4(u^2 + 2v) + X^3(2w + 2uv) + X^2(2uw + v^2) + X(2vw) + X^0(w^2 + a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3 \circ Q_2 &= (X^3 + uX^2 + vX + w) \circ (X^2 + a) \\ &= (X^2 + a)^3 + u(X^2 + a)^2 + v(X^2 + a) + w \end{aligned}$$

Comme  $Q_3 \circ Q_2 = (X^2 + a)^3 + u(X^2 + a)^2 + v(X^2 + a) + w$  est pair et  $Q_2 \circ Q_3 = Q_3 \circ Q_2$ , on a  $u = w = 0$

Ainsi on a  $Q_2 \circ Q_3 = X^6 + X^4(2v) + X^2(v^2) + X^0(a)$

$$\begin{aligned} Q_3 \circ Q_2 &= (X^2 + a)^3 + v(X^2 + a) \\ &= X^6 + X^4(3a) + X^2(3a^2 + v) + X^0(a^3 + v.a) \end{aligned}$$

Comme  $Q_2 \circ Q_3 = Q_3 \circ Q_2$ ,

$$\begin{aligned} \text{on a } 2v = 3a \text{ et } 3a^2 + v = v^2 &\iff 3a^2 + \frac{3a}{2} = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \\ &\iff 4a^2 + 2a = 3a^2 \\ &\iff a^2 + 2a = 0 \iff a \in \{0, -2\} \end{aligned}$$

Conclusion : on a  $a \in \{0, -2\}$

**Rq :** Cette question technique a été très peu résolu le jours du concours

4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer, par l'absurde, qu'il n'y a qu'un seul polynôme unitaire de degré  $n$  qui commute avec  $Q_2$ .

On fait un RA. On suppose que  $A_n$  et  $B_n$  sont deux polynômes unitaire de degré  $n$  **distincts**

et que  $A_n \circ Q_2 = Q_2 \circ A_n$  et  $B_n \circ Q_2 = Q_2 \circ B_n$

On cherche oups

On note  $R = A_n - B_n$  et on regarder  $R \circ Q_2$

$$\begin{aligned} R \circ Q_2 &= (A_n - B_n) \circ Q_2 \\ &= A_n \circ Q_2 - B_n \circ Q_2 \\ &= Q_2 \circ A_n - Q_2 \circ B_n \\ &= (A_n^2 - a) - (B_n^2 - a) \\ &= (A_n - B_n) \cdot (A_n + B_n) \\ &= R \cdot (A_n + B_n) \end{aligned}$$

Comme  $A_n$  et  $B_n$  sont deux polynômes unitaire **distincts** de degré  $n$ ,

on a que  $R$  est un polynôme  $\neq \emptyset$  de degré  $r$  et  $0 \leq r \leq (n-1)$

et  $\deg(A_n + B_n) = n$

On a donc  $\deg(R \circ Q_2) = 2.r$  car composée de deux polynômes

et  $\deg(R \circ Q_2) = \deg(R \cdot (A_n + B_n)) = n.r$

Or  $r \leq (n-1)$  donc  $2.r < r.n$  donc c'est absurde.

Rq : Cette question difficile a été très peu résolue le jour du concours

5. (a) Supposons  $a = 0$ . Calculer  $Q_n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Le polynôme  $Q_n$  est unitaire de degré  $n$  et  $Q_n \circ X^2 = X^2 \circ Q_n$

On va montrer avec un RA que  $Q_n = X^n$

On suppose que  $Q_n = X^n + aX^p + \dots$  avec  $a \neq 0$  et  $0 \leq p \leq (n-1)$

On a alors  $Q_n \circ X^2 = X^{2n} + aX^{2p} + \dots$

et

$$X^2 \circ Q_n = (X^n + aX^p + \dots)^2 = X^{2n} + 2aX^{2p} + \dots$$

Comme  $Q_n \circ X^2 = X^2 \circ Q_n$ , on doit avoir  $2a = a \iff a = 0$  OUPS!!!

- (b) Supposons  $a = -2$ . Trouver  $B$  un polynôme de degré 1 tel que  $B \circ T_2 \circ B^{-1} = Q_2$

C'est la même question que la question B1. et c'est la même réponse

En déduire la suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Les polynômes  $Q_n$  et  $B \circ T_n \circ B^{-1}$  sont de degré  $n$  et "commutent" avec  $Q_2$

Donc à cause l'unicité Question B4, on a  $Q_n = B \circ T_n \circ B^{-1}$

6. Conclure

il y a deux familles  $\{A \circ X^n \circ A^{-1} \text{ avec } A \in \mathcal{E}\}$  et  $\{A \circ T_n \circ A^{-1} \text{ avec } A \in \mathcal{E}\}$