

## Programme de colle de la semaine 23

du Lundi 20 Avril au Vendredi 24 Avril.

### Questions de cours et autour du cours.

#### > Éléments simples : Primitive.

Soit  $r \in \mathbb{R}$ . Déterminer une primitive de  $\frac{1}{x-r}$ , de  $\frac{1}{(x-r)^2}$ , de  $\frac{1}{(x-r)^3}$

Décomposer en élément simple  $F(X) = \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}$ . En déduire une primitive de  $F(x)$  sur  $] -2, 0[$ .

#### > Éléments simples : Dérivée n-ième.

Déterminer la dérivée n-ième de  $\frac{1}{x-r}$ .

Décomposer en élément simple  $F(X) = \frac{1}{X^2+1}$ . En déduire la dérivée n-ième de  $F(x)$ .

#### > Éléments simples.

Énoncer la formule des résidus.

En déduire que :  $\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X-\omega_k}$  avec  $\omega_k = \exp\left(ik \frac{2\pi}{n}\right)$ .

#### > Révision Division euclidienne et matrice.

Énoncer le théorème de division euclidienne.

Calculer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2+5X+6$ .

Montrer que le polynôme  $X^2+5X+6$  annule la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ .

En déduire  $A^n$

#### > Révision Base. Soit les polynômes $P_0 = 1$ , $P_1 = -2X+1$ , $P_2 = 6X^2-6X+1$ et la famille $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ .

Montrer que  $\mathcal{C}$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  et décomposer  $P = aX^2 + bX + c$  dans cette base.

#### > Révision Base. Soit $A$ un polynôme de degré $\alpha$ .

Montrer que la famille  $\mathcal{B} = \{X^0, (X-r), X(X-r), \dots, X(X-r)^{\alpha-1}\}$  est une base de  $\mathbb{R}_\alpha[X]$

On décompose  $A$  sur cette base. Déterminer la coordonnée de  $A$  selon  $X^0$ .

#### > Révision Base. On considère $F = \frac{2X+3}{X(X+1)(X-1)}$

Montrer que :  $\mathcal{B} = \{(X+1)(X-1), X(X-1), X(X+1), X(X+1)(X-1), X^2(X+1)(X-1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}_4[X]$ .

Pourquoi le polynôme  $2X+3$  se décompose sur la base  $\mathcal{B}$ .

En déduire qu'il existe  $Q(X), a, b, c$  tel que  $F = \frac{2X+3}{X(X+1)(X-1)} = Q(X) + \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-1}$

### Exercices

On commence la théorie des matrice donc révision d'algèbre linéaire.