Révision.

Exercice 1. [Correction]

Partie A

Soit f, une fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

`On ne cherchera pas déterminer la fonction` f.

1. Déterminer $f'(0)$ et montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   Pour montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$, on lit son cours.
   J'ai démontrer en classe qu'une fonction solution d'une équation différentielle normalisée est $\mathscr{C}^\infty$
   Ce n'est pas un théorème, il faut le refaire.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)$.
3. Comme la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$, on sait grâce à Taylor-Young que
   pour tout n, la fonction f admet un DL_n en 0. Plus précisément
   $$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \text{ et en plus on a } a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$
   (a) En utilisant Q2, calculer a_{n+2} en fonction de a_n.
   (b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1} = \dfrac{(-4)^k.k!}{(2k+1)!}$
   (c) Obtenir également l'expression des termes a_{2k} à l'aide de $f(0)$ (k entier naturel).

Partie B On considère la fonction $D : x \longmapsto D(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1. Justifier le fait que la fonction D est définie sur $\mathbb{R}$ puis qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Il suffit de reprendre la rédaction type fait en classe de nombreuse fois.
2. Vérifier que la fonction D est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

   Si vous n'obtenez pas $D'(x) = -2x\,D(x) + 1$, **vous recommencez en appliquant la méthode lentement.**
3. Étudier la parité de D.
4. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ xe^{-x^2} \leqslant D(x) \leqslant x$.
5. (a) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt.$

   Oui c'est une IPP.

   (b) Soit la fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{t^2}}{t^2}$.

   Montrer que h est croissante sur $[1, +\infty[$.

   En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[\,,\quad \displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant h(x)\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$

   Enfin justifier que : $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \underset{x\to\infty}{=} o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$

   (c) Démontrer/justifier que : $\dfrac{e^{x^2}}{4x^3}$ et $\dfrac{3e}{4}$ sont chacun $o\left(\dfrac{e^{x^2}}{2x}\right)$ quand $x \to \infty$

   En déduire que : $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$

   (d) Justifier que : $D(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. Attention : $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt \neq \int_1^x e^{t^2}\,dt$

Partie C La question Q2 de cette partie est plus difficile.

On admet que $a = D(1) > 0$

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall\, x \geqslant A,\ D(x) \leqslant a$.
2. Démontrer que D admet et atteint son maximum en (au moins) un point b de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que ce maximum est égal à $\dfrac{1}{2b}$.
4. En déduire l'unicité du point où le maximum est atteint.

Partie D Q1 est une révision "facile" du chapitre sur les équations différentielles.

1. Déterminer à l'aide de la fonction D l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.
2. On suppose que f est une solution impair de l'équation différentielle

   Montrer que $f = D$

Sujet difficile et <u>très facultatif</u> sur les polynômes

Exercice 2. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle polynôme trigonométrique (réel) de degré n une fonction de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \cdots + \alpha_n \cos nx + \beta_1 \sin x + \cdots + \beta_n \sin nx \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) \Big) \end{aligned}$$

où $(\alpha_0, ..., \beta_n)$ sont des réels et $(\alpha_n, \beta_n) \neq (0,0)$.

Partie A

Soit f un polynôme trigonométrique (réel) de degré n fixé.

1. Présentation de f via les polynômes.
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme à coefficient dans $\mathbb{C}$, CàD $P = \mathbb{C}[X]$ tel que
   $$\forall x, \quad f(x) = e^{-inx} P\left(e^{ix}\right).$$
   De plus vérifier que P est de degré $2n$ et expliciter ses coefficients en fonction des α_i et β_i
   (b) Justifier que le polynôme P est unique (ainsi les coefficient a_k sont uniques)
   En déduire que l'écriture d'un polynôme trigonométrique est unique.
   (c) Vérifier que $P(0) \neq 0$ et que $\forall k \in \{0, 1, ..., 2n\}, \ \overline{a_k} = a_{2n-k}$

2. Sur les racines de P.
   (a) Montrer que : $\overline{P}(X) = X^{2n} P\left(\dfrac{1}{X}\right)$
   (b) En déduire que si z_0 est une racine de P de multiplicité exactement m
   alors $\dfrac{1}{\bar{z}_0}$ est aussi une racine de P de multiplicité exactement m.
   Méthode : On a $P(X) = (X - z_0)^m Q_1(X)$.
   On va, via du calcul, montrer que : $P(X) = \left(X - \dfrac{1}{\bar{z}_0}\right)^m Q_2(X)$
   (c) Justifier que : $z_0 = \dfrac{1}{\bar{z}_0} \iff |z_0| = 1$
   Conclusion : Les racines de P sont (forcément $\neq 0$ car $P(0)_n eq0$)
   $>$ Soit que module 1, CàD $e^{i\theta_k}$
   $>$ Soit elles vont par paire, CàD z_0 et $\dfrac{1}{\bar{z}_0}$
   Ainsi P peut se factoriser sous la forme $P(X) = \lambda . \underbrace{\prod_{k=1}^{p} \left(X - e^{i\theta_k}\right)^{\alpha_k}}_{=A(X)} . \underbrace{\prod_{k=1}^{q} \left[(X - z_k)\left(X - \dfrac{1}{\bar{z}_k}\right)\right]^{\beta_k}}_{=B(X)}$

Partie B

On suppose dans cette partie que f est un polynôme trigonométrique réel, de degré n et Positif, CàD $\forall x, \ f(x) \geqslant 0$.
On vient de voir que $f(x) = e^{-inx} P\left(e^{ix}\right)$ et $P(X) = \lambda . A(X) . B(X)$.

1. Soit $e^{i\theta_0}$ une racine de $A(X)$ de multiplicité α_0.
   (a) Montrer que : $f(x) = \left[\sin\left(\dfrac{x - \theta_0}{2}\right)\right]^{\alpha_0} g(x)$
   où g est C^0et $g(\theta_0) \neq 0$.
   (b) Que peut-on en déduire que α_0 est un entier pair.

2. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$
$$\left(e^{i\theta} - z_k\right)\left(e^{i\theta} - \frac{1}{\bar{z}_k}\right) = -\frac{e^{i\theta}}{\bar{z}_k}\left|e^{i\theta} - z_k\right|^2$$
$$\left(e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right)^2 = -e^{i\theta} e^{i\theta_k}\left|e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right|^2$$

3. Déduire de ce qui précédé (partie A et B) que si f est un polynôme trigonométrique réel positif de degré n, alors il existe une polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left|Q\left(e^{ix}\right)\right|^2$$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) **Partie A**

Soit f, une fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

`On ne cherchera pas déterminer la fonction` f.

1. Déterminer $f'(0)$

   Comme la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$

   on sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall \times \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2x\, f(x) = 1$

   On applique avec $x = 0$, Conclusion : $f'(0) = 1$

   et montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   C'est dans le cours.

   On fait par récurrence $H_{<n>}$: La fonction f est $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)$.

   Méthode 1 : Avec Leibniz

   Méthode 2 : Par récurrence

3. Comme la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$, on sait grâce à Taylor-Young que

   pour tout n, la fonction f admet un DL_n en 0. Plus précisément

   $$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \text{ et en plus on a } a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

   (a) En utilisant Q2, calculer a_{n+2} en fonction de a_n.

   Avec la question Q2 et $x = 0$, on a $f^{(n+2)}(0) = -2(n+1)f^{(n)}(0)$

   $$\text{On a donc } a_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \frac{-2(2n)f^{(2n-1)}(0)}{(2n+1)!} = \frac{-2(2n)}{(2n+1)(2n)}a_{2n-1} = \frac{-2}{2n+1}a_{2n-1}$$

   (b) À l'aide de la question Q2, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1} = \dfrac{(-4)^k.k!}{(2k+1)!}$

   ON vient d'étalir une relation de récurrence

   Donc on fait maintenant par récurrence : $H_{<n>} : a_{2n+1} = \dfrac{(-4)^n.n!}{(2n+1)!}$

   (c) Obtenir également l'expression des termes a_{2k} à l'aide de $f(0)$ (k entier naturel).

   On reprend le calcule précédent, ainsi

   $$a_{2n+2} = \frac{f^{(2n+2)}(0)}{(2n+2)!} = \frac{-2(2n+1)f^{(2n)}(0)}{(2n+2)!} = \frac{-2(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)}a_{2n} = \frac{-1}{n+1}a_{2n}$$

   Ainsi *à la mode géo*, on a
   $$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{-1}{n}a_{2n-2} \\ &= \frac{-1}{n}\frac{-1}{n-1}a_{2n-4} \\ &\vdots \\ &= \frac{-1}{n}\frac{-1}{n-1}\cdots\frac{-1}{1}a_0 \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}f(0) \end{aligned}$$

Partie B

On considère la fonction $D : x \longmapsto D(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1. Justifier le fait que la fonction D est dérivable sur $\mathbb{R}$

   $>$ On commence par l'ensemble de définition

   Ssi la fonction $\underbrace{t \longmapsto e^{t^2}}$ est continue que $[0, x]$

   Ssi $[0, x] \subset \mathbb{R}$ car la fonction $\underbrace{t \longmapsto e^{t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$

   Conclusion : la fonction D est définie sur $\mathbb{R}$

   De plus comme la fonction $\underbrace{t \longmapsto e^{t^2}}$ est continue, on sait (théorie de la borne variable) que la fonction D est dérivable sur $\mathbb{R}$

   et que la fonction D est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ D'(x) = \dfrac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\left(\mathscr{H}(x) - \mathscr{H}(0)\right)\right]$
$= -2x\, e^{-x^2}\left(\mathscr{H}(x) - \mathscr{H}(0)\right) + e^{-x^2}\left(\mathscr{H}'(x) - \mathscr{O}\right)$
$= -2x\, D(x) + e^{-x^2}.e^{x^2}$
$= -2x\, D(x) + 1$

Conclusion : la fonction D est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

2. Étudier la parité de D.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $D(-x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^{-x} e^{t^2}\,dt$.

On fait le changement de variable $u = -t$, ainsi $D(-x) = -e^{-x^2}\displaystyle\int_0^{x} e^{u^2}\,du = -D(x)$

Conclusion : La fonction D est impaire

3. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ xe^{-x^2} \leqslant D(x) \leqslant x$.

Pour tout/chaque $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$>$ $\forall\, t \in [0,x],\ e^{0^2} \leqslant e^{t^2} \leqslant e^{x^2}$

Car $0 \leqslant t \leqslant x \implies 0 \leqslant t^2 \leqslant x^2$ et exp est croissante

$>$ On intègre sur $[0,x]$ puis on multiplie par $e^{-x^2} > 0$

4. (a) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt.$

On fait deux IPP en partant de $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt$

(b) Soit la fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{t^2}}{t^2}$.

Montrer que h est croissante sur $[1,+\infty[$.

On étudie la fonction ...

En déduire que : $\forall x \in [1,+\infty[\,,\quad \displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant h(x)\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$

Pour tout/chaque $x \geqslant 1$, on a

$>$ Comme la fonction h est croissante,

on a $\forall\, t \in [1,x],\ \dfrac{e^{t^2}}{t^4} = \dfrac{1}{t^2}\dfrac{e^{t^2}}{t^2} = \dfrac{1}{t^2}h(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}h(x)$

$>$ On intègre sur $[1,x]$

Ainsi $\forall x \in [1,+\infty[\,,\quad \displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant h(x)\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$

Montrer que : $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$

On va montrer que : $\dfrac{\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt}{\frac{e^{x^2}}{2x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

On a l'encadrement $\forall x \in [1,+\infty[$,

$$0 \leqslant \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant \underbrace{h(x)\left[\frac{-1}{t}\right]_1^x}_{=\frac{e^{x^2}}{2x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

Ainsi $0 \leqslant \dfrac{\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt}{\frac{e^{x^2}}{2x}} \leqslant \dfrac{1-\frac{1}{x}}{2x}$

Conclusion : Le théorème des gendarmes conclut.

(c) Démontrer/justifier que : $\dfrac{e^{x^2}}{4x^3}$ est $o\left(\dfrac{e^{x^2}}{2x}\right)$

En effet on a $\dfrac{\frac{e^{x^2}}{4x^3}}{\frac{e^{x^2}}{2x}} = \dfrac{1}{2x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

Démontrer/justifier que : $\dfrac{3e}{4}$ est $o\left(\dfrac{e^{x^2}}{2x}\right)$

En effet on a $\dfrac{\frac{3e}{4}}{\frac{e^{x^2}}{2x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

En déduire que : $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$ On a

$$\begin{aligned}\int_1^x e^{t^2}\,dt &= \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}dt \\ &= \frac{e^{x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right) + o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right) + o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right) \\ &= \frac{e^{x^2}}{2x}[1+o(1)] \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}\end{aligned}$$

(d) En déduire que $D(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

On a $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt = \int_0^1 e^{t^2}dt + \int_1^x e^{t^2}dt$

De plus $\displaystyle\int_0^1 e^{t^2}dt = Konstante \underset{x\to\infty}{=} o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$ (facile avec le quotient)

Ainsi on a : $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right) + \frac{e^{x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$

Conclusion : $\displaystyle D(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt \underset{x\to\infty}{=} e^{-x^2}\frac{e^{x^2}}{2x}[1+o(1)] \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

Partie C

On admet que $a = D(1) > 0$

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall\, x \geqslant A,\ \ D(x) \leqslant a$.

   J'applique la définition de $D(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ avec $\varepsilon = a > 0$

   Ainsi il existe $A > 0$ tel que $\forall\, x \geqslant A,\ D(x) \leqslant \ell + \varepsilon = 0 + a = a$

2. Démontrer que D admet et atteint son maximum en (au moins) un point b de $\mathbb{R}_+^*$.

   Sur l'intervalle $[A, +\infty[$ on a $D(x) \leqslant a = D(1)$

   Sur le segment $[0, A]$ la fonction D est continue donc majorée et atteint sa bornes

   Ainsi il existe $\alpha \in [0, A]$ tel que $\forall\, x \in [0, A]\,,\ D(x) \leqslant D(\alpha)$

   On a donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ D(x) \leqslant \max\Big(D(\alpha), D(1)\Big)$

   Conclusion : La fonction D est majorée sur $\mathbb{R}_+$

   et atteint sont majorant en b avec $b = 1$ ou $b = \alpha$

   Bonus : On a $b \neq 0$ car $D(0) = 0 < D(1)$. Donc le résultat annoncé est valide sur $\mathbb{R}_+^*$

3. Montrer que ce maximum est égal à $\dfrac{1}{2b}$.

   b est le maximum de la fonction D, n'est pas une borne et D est dérivable

   Donc $D'(b) = 0$ et avec l'équation différentielle, on a $D'(b) + 2b\,D(b) = 1$, CàD $D(b) = \dfrac{1}{2b}$

4. En déduire l'unicité du point où le maximum est atteint.

   On suppose que b et b' sont deux maximums pour la fonction D, on a donc $D(b) = D(b')$.

   On vient de voir que $D(b) = \dfrac{1}{2b}$ et de même $D(b') = \dfrac{1}{2b'}$

   Conclusion : $\dfrac{1}{2b} = \dfrac{1}{2b'} \implies b = b'$, CàD il y a unicité

Partie D

1. Déterminer à l'aide de la fonction D l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

   L'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$ est une EDL1.

   Le solution sont la somme

$>$ D'une solution particulière, ici D convient

$>$ Des solutions de l'équation homogène associée, CàD $h' + 2xh = \mathscr{O}$.

On trouve facilement que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = K\, e^{-x^2}$ avec $K \in \mathbb{R}$

Conclusion : les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$
sont : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y(x) = D(x) + K\, e^{-x^2}$ avec $K \in \mathbb{R}$

2. Montrer l'existence d'une unique solution impaire.

On suppose que y est une solution impaire de l'équation différentielle.

Comme y est une solution de l'équation différentielle, on sait que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y(x) = D(x) + K\, e^{-x^2}$ avec $K \in \mathbb{R}$

De plus y est impaire, on a donc $y(-x) = -y(x)$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ D(-x) + K\, e^{-(-x)^2} = -D(x) - K\, e^{-x^2} \\
&\Longrightarrow\ -D(x) + K\, e^{-x^2} = -D(x) - K\, e^{-x^2} \\
&\Longrightarrow\ 2K\, e^{-x^2} = \mathscr{O} \\
&\Longrightarrow\ K = 0
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y(x) = D(x) + \mathscr{O}\, e^{-x^2} = D(x)$
CàD D est l'unique solution impaire de l'équation différentielle

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle polynôme trigonométrique (réel) de degré n une fonction de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \cdots + \alpha_n \cos nx + \beta_1 \sin x + \cdots + \beta_n \sin nx \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) \Big) \end{aligned}$$

où $(\alpha_0, ..., \beta_n)$ sont des réels et $(\alpha_n, \beta_n) \neq (0,0)$.

Partie A

Soit f un polynôme trigonométrique (réel) de degré n fixé.

1. Présentation de f via les polynômes.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme à coefficient dans $\mathbb{C}$, CàD $P = \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall x, \quad f(x) = e^{-inx} P\left(e^{ix}\right)$

$$\begin{aligned} \text{On a } f(x) &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) \Big) \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + \beta_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2} e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} e^{-ikx} \\ &= e^{-inx} \left[\alpha_0 e^{inx} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2} e^{i(n+k)x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} e^{i(n-k)x} \right] \\ &= e^{-inx} \left[\alpha_0 e^{inx} + \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{\alpha_{p-n} - i\beta_{p-n}}{2} e^{ipx} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n-p} + i\beta_{n-p}}{2} e^{ipx} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion } P(X) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n-p} + i\beta_{n-p}}{2} X^p + \alpha_0 X^n + \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{\alpha_{p-n} - i\beta_{p-n}}{2} X^p = \text{convient}$$

Dans la suite, je note a_k les coefficients de P.

De plus vérifier que P est de degré $2n$ et expliciter ses coefficients en fonction des α_i et β_i

Le coefficient de X^{2n} vaut $\dfrac{\alpha_n - i\beta_n}{2} \neq 0$ car $(\alpha_n, \beta_n) \neq (0,0)$.

Donc P est de degré $2n$ et il suffit de lire les coefficients

(b) Justifier que le polynôme P est unique (ainsi les coefficient a_k sont uniques)

On suppose que : $\forall x, \quad f(x) = e^{-inx} P_1\left(e^{ix}\right) = e^{-inx} P_2\left(e^{ix}\right)$

Donc $\forall x, \; P_1\left(e^{ix}\right) = P_2\left(e^{ix}\right)$

Les polynômes P_1 et P_2 coïncident sur une infinités de valeurs donc ils sont égaux

En déduire que l'écriture d'un polynôme trigonométrique est unique.

On a $a_{n+k} = \dfrac{\alpha_k - i\beta_k}{2}$ et $a_{n-k} = \dfrac{\alpha_k + i\beta_k}{2}$

Donc α_k et β_k s'expriment en fonction de a_{n+k} et a_{n-k} et donc sont uniques

(c) Vérifier que $P(0) \neq 0$ et que $\forall k \in \{0, 1, ..., 2n\}, \; \overline{a_k} = a_{2n-k}$

On a $P(0) = \dfrac{\alpha_n + i\beta_n}{2} \neq 0$ car $(\alpha_n, \beta_n) \neq (0,0)$.

ET $a_{n+k} = \dfrac{\alpha_k - i\beta_k}{2} = \overline{\dfrac{\alpha_k + i\beta_k}{2}} = \overline{a_{n-k}}$

Conclusion : $\forall p \in \{0, 1, ..., 2n\}, \; \overline{a_p} = \overline{a_{n-k}} = a_{n+k} = a_{2n-p}$

2. Sur les racines de P.

(a) Montrer que : $\overline{P}(X) = X^{2n} P\left(\dfrac{1}{X}\right)$

On a $\overline{P}(X)=\sum_{k=0}^{2n}\overline{a_k}\,X^k=\sum_{k=0}^{2n}a_{2n-k}\,X^k$

$$=\sum_{p=0}^{2n}a_p\,X^{2n-p}$$

$$=X^{2n}\sum_{p=0}^{2n}a_p\,\frac{1}{X^p}=X^{2n}P\left(\frac{1}{X}\right)$$

(b) En déduire que si z_0 est une racine de P de multiplicité exactement m alors $\dfrac{1}{\bar{z}_0}$ est aussi une racine de P de multiplicité exactement m.

Comme z_0 est une racine de P de multiplicité exactement m, on a $P(X)=(X-z_0)^m Q_1(X)$ et $Q_1(z_0)\neq 0$

ET $\overline{P}(X)=X^{2n}P\left(\frac{1}{X}\right)\implies P(X)=\overline{\overline{P}}(X)=X^{2n}\overline{P}\left(\frac{1}{X}\right)$

On va $P(X)=X^{2n}\overline{P}\left(\frac{1}{X}\right)$

$$=X^{2n}\left(\frac{1}{X}-\overline{z_0}\right)^m\overline{Q_1}\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$=X^{2n-m}\left(1-X\right)^m\overline{Q_1}\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$=\left(X-\frac{1}{\bar{z}_0}\right)^m X^{2n-m}\frac{1}{(\overline{z_0})^m}\overline{Q_1}\left(\frac{1}{X}\right)=\left(X-\frac{1}{\bar{z}_0}\right)^m Q_2(X)$$

Comme Q_1 est un polynôme de degré (2n-m) alors $Q_2(X)=X^{2n-m}\dfrac{1}{(\overline{z_0})^m}\overline{Q_1}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ est bien un polynôme.

Donc Yes

(c) Justifier que : $z_0=\dfrac{1}{\bar{z}_0}\iff|z_0|=1$

On a $z_0=\dfrac{1}{\bar{z}_0}\iff z_0.\overline{z_0}=1\iff|z_0|^2=1\iff|z_0|=1$

Conclusion : Les racines de P sont

> Soit que module 1, CàD $e^{i\theta_k}$

> Soit elles vont par paire, CàD z_0 et $\dfrac{1}{\bar{z}_0}$

Ainsi P peut se factoriser sous la forme $P(X)=\lambda.\underbrace{\prod_{k=1}^{p}\left(X-e^{i\theta_k}\right)^{\alpha_k}}_{=A(X)}.\underbrace{\prod_{k=1}^{q}\left[(X-z_k)\left(X-\frac{1}{\bar{z}_k}\right)\right]^{\beta_k}}_{=B(X)}$

Partie B

On suppose dans cette partie que f est un polynôme trigonométrique réel, de degré n et Positif, CàD $\forall x,\ f(x)\geqslant 0$.
On vient de voir que $f(x)=e^{-inx}P\left(e^{ix}\right)$ et $P(X)=\lambda.A(X).B(X)$.

1. Soit $e^{i\theta_0}$ une racine de $A(X)$ de multiplicité α_0.

(a) Montrer que : $f(x)=\left[\sin\left(\dfrac{x-\theta_0}{2}\right)\right]^{\alpha_0}g(x)$ où g est C^0et $g(\theta_0)\neq 0$.

On a avec l'argument moitié, $e^{ix}-e^{i\theta_0}=e^{ix/2}e^{i\theta_0/2}\left[2i\sin\left(\dfrac{x-\theta_0}{2}\right)\right]$

$$\text{Ainsi } f(x)=e^{-inx}\lambda.\left(e^{ix}-e^{i\theta_0}\right).\prod_{les\ Autres}\left(e^{ix}-e^{i\theta_k}\right)^{\alpha_k}.\prod_{k=1}^{q}\left[\left(e^{ix}-z_k\right)\left(e^{ix}-\frac{1}{\bar{z}_k}\right)\right]^{\beta_k}$$

$$=\left[\sin\left(\frac{x-\theta_0}{2}\right)\right]^{\alpha_0}g(x)$$

avec $g(x)=e^{-inx}\lambda..\prod_{les\ Autres}\left(e^{ix}-e^{i\theta_k}\right)^{\alpha_k}.\prod_{k=1}^{q}\left[\left(e^{ix}-z_k\right)\left(e^{ix}-\frac{1}{\bar{z}_k}\right)\right]^{\beta_k}$ est $\mathscr{C}^0$et $g(\theta_0)\neq 0$

(b) Que peut-on en déduire que α_0 est un entier pair.

Si α_0 est un entier impair alors la fonction f change de signe en θ_0

OUPS car f est positive.

Conclusion : α_0 est un entier pair.

2. Montrer que $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \left(e^{i\theta} - z_k\right)\left(e^{i\theta} - \dfrac{1}{\bar{z}_k}\right) = -\dfrac{e^{i\theta}}{\bar{z}_k}\left|e^{i\theta} - z_k\right|^2$ et $\left(e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right)^2 = -e^{i\theta}e^{i\theta_k}\left|e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right|^2$

$$\begin{aligned}
\left(e^{i\theta} - z_k\right)\left(e^{i\theta} - \frac{1}{\bar{z}_k}\right) &= \left(e^{i\theta} - z_k\right)\frac{e^{i\theta}}{\bar{z}_k}\left(\bar{z}_k - e^{-i\theta}\right) \\
&= \frac{e^{i\theta}}{\bar{z}_k}\left(e^{i\theta} - z_k\right)\left(\overline{z_k} - \overline{e^{i\theta}}\right) \\
&= \frac{e^{i\theta}}{\bar{z}_k}\left(e^{i\theta} - z_k\right) \ominus \overline{\left(e^{i\theta} - z_k\right)} = -\frac{e^{i\theta}}{\bar{z}_k}\left|e^{i\theta} - z_k\right|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right)^2 &= \left(e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right)\left(e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right) \\
&= \left(e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right)e^{i\theta}e^{i\theta_k}\left(e^{-i\theta_k} - e^{-i\theta}\right) \\
&= e^{i\theta}e^{i\theta_k}\left(e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right)\overline{\left(e^{i\theta_k} - e^{i\theta}\right)} \\
&= e^{i\theta}e^{i\theta_k}\left(e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right) \ominus \overline{\left(e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right)} \\
&= -e^{i\theta}e^{i\theta_k}\left|e^{i\theta} - e^{i\theta_k}\right|^2
\end{aligned}$$

3. Déduire de ce qui précédé que si f est un polynôme trigonométrique réel positif de degré n, alors il existe une polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left|Q\left(e^{ix}\right)\right|^2$

On a $f(x) = e^{-inx}\,P(e^{ix})$

$$\begin{aligned}
&= e^{-inx}\lambda.\prod_{k=1}^{p}\left(e^{ix} - e^{i\theta_k}\right)^{2\alpha_k}.\prod_{k=1}^{q}\left[\left(e^{ix} - z_k\right)\left(e^{ix} - \frac{1}{\bar{z}_k}\right)\right]^{\beta_k} \\
&= e^{-inx}\lambda.\prod_{k=1}^{p}\left(-e^{ix}e^{i\theta_k}\left|e^{ix} - e^{i\theta_k}\right|^2\right)^{\alpha_k}.\prod_{k=1}^{q}\left[-\frac{e^{ix}}{\bar{z}_k}\left|e^{ix} - z_k\right|^2\right]^{\beta_k} \\
&= Konstante\left|\prod_{k=1}^{p}\left(e^{ix} - e^{i\theta_k}\right)^{\alpha_k}\prod_{k=1}^{q}\left[e^{ix} - z_k\right]^{\beta_k}\right|^2 \\
&= K\ \left|R\left(e^{ix}\right)\right|^2 \quad avec\ R\left(e^{ix}\right) = \prod_{k=1}^{p}\left(e^{ix} - e^{i\theta_k}\right)^{\alpha_k}\prod_{k=1}^{q}\left[e^{ix} - z_k\right]^{\beta_k}
\end{aligned}$$

Enfin K est un réel positif car $f(x)$ et $\left|R\left(e^{ix}\right)\right|^2$ sont deux réels positifs

Conclusion : $K = k^2$ et $f(x) = k^2\left|R\left(e^{ix}\right)\right|^2 = \left|Q\left(e^{ix}\right)\right|^2$
avec $Q = k.R\left(e^{ix}\right)$ Fini