

**Matrices et morphismes.**

<b>1 Rappel d'algèbre linéaire</b>	<b>1</b>	5.2 Propriétés/Formulaire. . . . .	6
<b>2 Compléments.</b>	<b>2</b>	5.3 Correspondance Matrice-Application linéaire. . .	8
2.1 Rappels : Ce que l'on sait sur les matrices . . . . .	2	<b>6 Exemples/Applications</b>	<b>9</b>
2.2 La base classique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . . . . .	2	6.1 Matrice des morphismes classiques . . . . .	9
2.3 Compléments : Calculs par bloc. . . . .	3	6.2 Fonction $h_A$ associée à une matrice. . . . .	9
<b>3 Construire une fonction linéaire.</b>	<b>4</b>	6.3 Étudier $\ker(h)$ . . . . .	10
<b>4 Matrice des vecteurs (déjà vu)</b>	<b>5</b>	6.4 Étudier $\text{Im}(h)$ et $\text{rang}(h)$ . . . . .	10
<b>5 Matrice d'un morphisme.</b>	<b>6</b>	<b>7 Changement de base.</b>	<b>11</b>
5.1 Définition et Matrices classiques. . . . .	6	7.1 Matrice de changement de base. . . . .	11
		7.2 Formules de Changement de Base. . . . .	12
		7.3 Les matrices semblables . . . . .	13
		<b>8 Matrices des Symétries et des Projections.</b>	<b>14</b>

**1 Rappel d'algèbre linéaire**

**Exercice 1. [Correction]**

On note  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

On note  $\mathcal{M}at_3(\mathbb{C})$  l'espace vectoriel des matrice  $3 \times 3$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

On considère  $G = \{M_{a,b} \in \mathcal{M}at_3(\mathbb{C}) \text{ avec } a, b \in \mathbb{C}\}$  avec  $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

On note  $\mathcal{O} = M_{0,0}$  la matrice nulle,  $I = M_{1,0}$  la matrice identité et  $A = M_{0,1}$

1. Calcul de  $[M_{a,b}]^n$ .

- (a) Montrer que  $G$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  et calculer sa dimension et une base.
- (b) Montrer que  $G$  est stable par le produit.
- (c) On note  $B = A + I$  et  $C = A - 2I$ .

Montrer que la famille  $(B, C)$  est une base de  $G$  et calculer les coordonnées de  $M_{a,b}$  dans cette base.

(d) Calculer  $B^2, C^2, B.C$  et  $CB$   
En déduire  $[M_{a,b}]^2$ .

(e) Calculer  $[M_{a,b}]^n$ .

2. Diagonalisation de  $A$  et de  $M_{a,b}$

(a) Montrer que  $P(x) = \det(A - xI)$  est un polynôme de degré 3 et que  $r = -1$  et  $r = 2$  sont ses seules racines

(b) On considère  $E_1$  l'ensemble des vecteurs  $\vec{X} = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $A\vec{X} = -\vec{X}$

Montrer que  $E_1$  est un ssev de dimension 2. On note  $(\vec{C}_1, \vec{C}_2)$  une base  $E_1$

(c) On considère  $E_2$  l'ensemble des vecteurs  $\vec{X} = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $A\vec{X} = 2\vec{X}$

Montrer que  $E_2$  est un ssev de dimension 1. On note  $\vec{C}_3$  une base  $E_1$

(d) On note  $P = (\vec{C}_1 | \vec{C}_2 | \vec{C}_3)$  la matrice  $3 \times 3$  dont les vecteurs colonnes sont  $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3$

Justifier que  $P$  est inversible et que  $A.P = P.D$  avec  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(e) Justifier que  $M_{a,b} = P.\mathcal{D}.P^{-1}$  avec  $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}$  et calculer  $[M_{a,b}]^n$

3. Application. On veut trouver les matrices  $M \in G$  vérifiant  $(M + I)^{2n} - I = \mathcal{O}$

On va utiliser la matrice  $\mathcal{D}$  de la question Q2e.

(a) Montrer que :  $(M + I)^{2n} - I = \mathcal{O} \iff (\mathcal{D} + I)^{2n} - I = \mathcal{O}$

(b) Déterminer les matrices  $\mathcal{D}$  vérifiant  $(\mathcal{D} + I)^{2n} - I = \mathcal{O}$ .

(c) Déterminer les matrices  $M$  de  $G$  vérifiant  $(M + I)^{2n} - I = \mathcal{O}$

## 2 Compléments.

### 2.1 Rappels : Ce que l'on sait sur les matrices

> Opérations classiques : Somme, Combinaison Linéaire, Produit, Formule du binôme  $(I_n + A)^p$ .

> Outils spécifiques : Trace, Déterminant.

> Les formes particulière :  $\mathcal{O}_{n,p}$ ,  $I_n$ , Matrices scalaire, diagonale, Triangulaire sup/inf, symétrique.

> Les matrices inversibles : Définition, caractérisation, propriétés, calcul de l'inverse.

> Matrice Nilpotente : Définition et formule du binôme/Calcul de  $A^n$ .

> Matrices semblables : Définition, trace, Déterminant, Calcul de  $A^n$ .

> Les erreurs classiques

### 2.2 La base classique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

#### Théorème 1. La base classique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\text{on note } E_{ij} = (e_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq n} \text{ avec } e_{\alpha\beta} = \begin{cases} = 0 & \text{Si } \alpha \neq i \text{ ou } \beta \neq j \\ = 1 & \text{Si } \alpha = i \text{ et } \beta = j \end{cases}$$

La famille  $(E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, \dots, E_{nn})$  est la base classique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel de dimension  $n^2$

$$\text{De plus on a } E_{i,j} = \vec{E}_i \times (\vec{E}_j)^T = \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \cdots 1 \cdots 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{ij} \times E_{kl} = \delta_{j,k} E_{il}$$

## 2.3 Compléments : Calculs par bloc.

On peut décomposer les matrices carrées en bloc, par exemple

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ 4 & 5 & 6 & \\ 7 & 8 & 9 & \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} \text{Bloc}_1 & & \text{Bloc}_3 \\ & \text{Bloc}_2 & \\ & & \text{Bloc}_4 \end{array} \right)$$

### Théorème 2. Autour des blocs

Soit  $A$  une matrice diagonale/triangulaire par bloc, par exemple  $A = \left( \begin{array}{cc|c} \text{Bloc}_1 & & \text{Bloc}_3 \\ & \text{Bloc}_2 & \\ & & \text{Bloc}_4 \end{array} \right)$

Triangulaire par bloc

$$\text{On a } \det(A) = \det \left( \begin{array}{cc|c} \left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{array} \right) & & \left( \begin{array}{c} 3 \\ 6 \end{array} \right) \\ 0 & & (9) \end{array} \right) = \det \left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{array} \right) \cdot \det(9) = -3 \cdot 9 = -27$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{det des blocs diagonaux}}$

Diagonale par bloc

$$\begin{aligned} \text{On a alors } A^n &= \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{array} \right)^n & \text{et } A^{-1} &= \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{cc|c} \left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{array} \right)^{-1} & & 0 \\ 0 & & (9)^{-1} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc|c} \left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{array} \right)^n & & 0 \\ 0 & & (9)^n \end{array} \right) & & = \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{-3} \left( \begin{array}{cc} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{array} \right) & & 0 \\ 0 & & 1/9 \end{array} \right) \end{aligned}$$

### 3 Construire une fonction linéaire.

**Théorème 3. Particulier  $\implies$  général**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  une base de  $E$ . Soit  $E'$  un autre  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  
Soit  $h \in \mathcal{L}(E, E')$  un morphisme.

On suppose que l'on connaît  $f$  sur les éléments *particuliers*  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$

CàD je connais que  $h(\vec{e}_1) = \vec{b}_1, \dots, \text{et } h(\vec{e}_n) = \vec{b}_n$

Alors *général* pour tout  $\vec{u} \in E$ , on peut calculer  $h(\vec{u})$

Et on a  $h(\vec{u}) = u_1 h(\vec{e}_1) + u_2 h(\vec{e}_2) + \dots + u_n h(\vec{e}_n)$

Démonstration : On a  $\vec{u} \in E$  et  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  est une base, ainsi on a  $\vec{u} = \sum_{k=1}^n u_k \vec{e}_k$

Conclusion : on a  $h(\vec{u}) = h\left(\sum_{k=1}^n u_k \vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^n u_k h(\vec{e}_k)$

**Théorème 4. Construire un morphisme**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  une base de  $E$ .

Soit  $E'$  un autre  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  des vecteurs dans  $E'$ .

Alors il existe un unique morphisme  $h \in \mathcal{L}(E, E')$   
tel que  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, h(\vec{e}_k) = \vec{b}_k$ .

Application :

> Unicité : Deux morphismes qui coïncident sur une base, sont égaux.

> Fabriquer : Pour fabriquer un morphisme, il suffit de définir l'image d'une base.

Démonstration : L'unicité est la conséquence du théorème précédent.

Pour l'existence, on va faire une Analyse-Synthèse, je trouve le bon candidat puis je vérifie qu'il convient.

Analyse.

Si  $f$  existe, il n'y a pas beaucoup de possibilité pour  $h(\vec{u})$ .

En effet, comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , on décompose  $\vec{u}$  dans cette base, ainsi on peut écrire

$$\vec{u} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc forcément } h(\vec{u}) &= h(a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n) = a_1 h(\vec{e}_1) + a_2 h(\vec{e}_2) + \dots + a_n h(\vec{e}_n) \\ &= a_1 \vec{b}_1 + a_2 \vec{b}_2 + \dots + a_n \vec{b}_n \end{aligned}$$

Synthèse.

On doit montrer que la fonction  $f$  défini par

$$\forall \vec{u} \in E, h(\vec{u}) = a_1 \vec{b}_1 + a_2 \vec{b}_2 + \dots + a_n \vec{b}_n \text{ convient}$$

On doit faire

>  $f$  est bien définie. Facile

>  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, h(\vec{e}_k) = \vec{b}_k$  Facile

> et surtout  $f$  est linéaire. Plus difficile, on doit utiliser des arguments d'unicité. A faire.

**Théorème 5. Prolongement des morphismes**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On suppose  $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$

Soit  $E'$  un autre  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit  $h_i$  des fonctions linéaires de  $E_i$  à valeurs dans  $E'$ .

Alors il existe une unique fonction linéaire  $h \in \mathcal{L}(E, E')$   
qui prolonge les  $h_i$ , CàD  $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, h|_{E_i} = h_i$

Le théorème est difficile à comprendre mais il sera plus accessible quand on aura revue les symétries et projections.

Démonstration : Je fais vite.

Il faut se souvenir que comme  $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$  alors  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$  est une base de  $E$ .

> Avec le théorème précédent et la contrainte  $h(\mathcal{B}_i) = h_i(\mathcal{B}_i)$  permet de construire  $h$ .

> Avec le théorème 2, on a  $h|_{E_i} = h_i$  et  $h$  est unique.

## 4 Matrice des vecteurs (déjà vu)

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel et  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  une base de  $E$ .

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de  $E$

> Comme  $\vec{u} \in E$  et que  $\mathcal{B}$  est une base, on peut décomposer  $\vec{u}$  sur la base  $\mathcal{B}$ , CàD

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \in E \\ \mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \text{ est une base de } E \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{il existe } u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R} \\ \text{tel que } \vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + \dots + u_n \vec{e}_n \end{array}$$

> De plus comme  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  est une base la décomposition est unique.

### Définition 6.

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel et  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  une base de  $E$ .

#### Matrice d'un vecteur.

La matrice du vecteur  $\vec{u}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ , noté  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u})$ , c'est

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + \dots + u_n \vec{e}_n \iff \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \vec{e}_1 \\ \leftarrow \vec{e}_2 \\ \\ \leftarrow \vec{e}_n \end{array}$$

Notation : Lorsque  $\mathcal{B}$  c'est la base classique, on met  $\mathcal{M}at$  à la place de  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}$ .

#### Matrice d'une famille.

La matrice de la famille  $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$  dans la base  $\mathcal{B}$ , notée  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ , c'est la matrice

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = (\vec{U}_1 | \vec{U}_2 | \dots | \vec{U}_p) = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_p \\ u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,p} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,p} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \vec{e}_1 \\ \leftarrow \vec{e}_2 \\ \\ \leftarrow \vec{e}_n \end{array}$$

Ainsi  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$  c'est la matrice dont les vecteurs colonnes sont  $\vec{U}_k = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u}_k)$ .

### Théorème 7. Propriétés/Formulaire

Soit  $E_n$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $E$ .

Lorsque  $\vec{u}$  est un vecteur  $E$  alors on note  $\vec{U} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u})$ .

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \text{ est une base de } E_n &\iff (\vec{U}_1 | \vec{U}_2 | \dots | \vec{U}_n) \text{ est base de } \mathbb{R}^n \\ &\iff \det(\vec{U}_1 | \vec{U}_2 | \dots | \vec{U}_n) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) \text{ est libre/liée/géné} &\iff (\vec{U}_1 | \vec{U}_2 | \dots | \vec{U}_p) \text{ est libre/liée/géné} \\ \text{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) &= \text{rg}(\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_p) \quad \text{Rappel : rg = rang} \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(2\vec{u} - 3\vec{v}) = 2\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u}) - 3\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = 2\vec{U} - 3\vec{V}$$

La correspondance  $\vec{u} \longleftrightarrow \vec{U} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u})$  est un isomorphisme.

## 5 Matrice d'un morphisme.

### 5.1 Définition et Matrices classiques.

#### Définition 8.

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  une base de  $E$ .

Soit  $E'$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_p\}$  une base de  $E'$ .

Soit  $h \in \mathcal{L}(E, E')$  un morphisme de  $E$  à valeurs dans  $E'$ .

La matrice  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , notée  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$  ou  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ , c'est

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} h(\vec{e}_1) & h(\vec{e}_2) & \dots & h(\vec{e}_n) \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \vec{f}_1 \\ \leftarrow \vec{f}_2 \\ \\ \leftarrow \vec{f}_p \end{matrix}$$

Lorsque  $E' = E$  et  $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ ,

la matrice  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  est simplement notée  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$

### 5.2 Propriétés/Formulaire.

#### Théorème 9. Propriétés/Formulaire

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  une base de  $E$  et  $\vec{u} \in E$

Soit  $E'$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_p\}$  une base de  $E'$ .

Soit  $f, g, h \in \mathcal{L}(E, E')$

On a alors

> *Identification*  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(g) \implies f = g$ . La réciproque est évidente.

> *Calculs.*

$$\text{Calcul de } h(\vec{u}). \quad \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(h(\vec{u})) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = A\vec{U}$$

$$\text{Calcul de } g \circ f. \quad \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(g \circ f) = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(g) \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = A \cdot B$$

> *Isolinverse.*  $h$  est un isomorphisme ssi  $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h)$  est carrée et inversible.

$$\text{On a de plus } \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(h^{-1}) = A^{-1}$$

> *Noyau.*  $\vec{u} \in \ker(h) \iff \vec{u} \in \mathcal{D} \text{ et } h(\vec{u}) = \vec{0} \iff A\vec{U} = \vec{0}$

> *Image/rang*  $rg(h) \stackrel{\text{def}}{=} \dim[\text{Im}(h)] = rg(A)$

> Pour les endo : *Poly/trace/Déterminant*

$A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(h)$  est une matrice carrée

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(h \circ h - 2h + 3id) = A^2 - 2A + 3I$$

$$tr(h) \stackrel{\text{def}}{=} tr(A) \text{ et } \det(h) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A)$$

Il est naturel (mais non-évident) que :  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) + \mu \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(g)$ .

Si  $A$  est une matrice de taille  $p \times n$ , alors il existe un unique morphisme  $h$  tel que  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h) = A$

La correspondance  $h \longleftarrow A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h)$  est un isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E, E')$  sur  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

Ainsi  $\dim(\mathcal{L}(E, E')) = np = \dim(E) \times \dim(E')$

Démonstration : *Démonstration de : identification.*

C'est exactement le passage du particulier au général

Démonstration : *Démonstration de : Calcul de  $h(\vec{u})$ .*

L'objectif est calculé  $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(h(\vec{u}))$  en fonction de  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h)$  et de  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u})$ .

Je note

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h) = \begin{matrix} & h(\vec{e}_1) & h(\vec{e}_2) & \dots & h(\vec{e}_n) & & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} & \leftarrow \vec{f}_1 & & & \leftarrow \vec{f}_2 & & \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ & \leftarrow \vec{f}_p & & & & & \end{matrix} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{matrix} \vec{u} & & & & & & \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} & \leftarrow \vec{e}_1 & & & \leftarrow \vec{e}_2 & & \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ & \leftarrow \vec{e}_n & & & & & \end{matrix} \quad \text{Mat}_{\mathcal{C}}(h(\vec{u})) = \begin{matrix} h(\vec{u}) & & & & & & \\ \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix} & \leftarrow \vec{f}_1 & & & \leftarrow \vec{f}_2 & & \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ & \leftarrow \vec{f}_p & & & & & \end{matrix}$$

On va calculer les coordonnées de  $h(\vec{u})$  dans la base  $\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_p\}$ .

On a  $h(\vec{u}) = h(u_1 \vec{e}_1 + \dots + u_n \vec{e}_n)$

$= u_1 h(\vec{e}_1) + \dots + u_n h(\vec{e}_n)$

$= u_1 [a_{1,1} \vec{f}_1 + \dots] + \dots + u_n [a_{1,n} \vec{f}_1 + \dots]$

$= [u_1 a_{1,1} + \dots + u_n a_{1,n}] \vec{f}_1 + \dots$

Conclusion :  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(h(\vec{u})) = \begin{matrix} h(\vec{u}) & & & & & & \\ \begin{pmatrix} u_1 a_{1,1} + \dots + u_n a_{1,n} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix} & \leftarrow \vec{f}_1 & & & \leftarrow \vec{f}_2 & & \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ & \leftarrow \vec{f}_p & & & & & \end{matrix}$

On vérifie facilement que  $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} u_1 + \dots + a_{1,n} u_n \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix}$

Conclusion : on a bien  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(h(\vec{u})) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u})$

Démonstration : *Démonstration de Iso/inverse.*

$\Rightarrow ?$

On suppose que  $f$  est un isomorphisme, ainsi  $f^{-1}$  existe et  $\dim(E) = \dim(E')$ , la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h)$  est donc carrée. De plus avec (ii), on a

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f \circ f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(id) = I_n$

Donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h)$  est inversible et  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = [\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h)]^{-1}$

$\Leftarrow ?$

Comme  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h)$  est inversible, alors  $A^{-1}$  existe.

Je note  $g \in \mathcal{L}(E', E)$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g) = A^{-1}$ . (On a vu que  $g$  existe et est unique.)

A cause de (ii), on a

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h) = A^{-1} \cdot A = I_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(id)$

Donc  $g \circ f = id$ .

De même on démontre que  $f \circ g = id$

$\left. \begin{matrix} g \circ f = id \\ f \circ g = id \end{matrix} \right\} \Rightarrow f \text{ est bijectif et } f^{-1} = g$

Fini  $\square$

Démonstration : *Noyau-Image/rang.*

Noyau : C'est évident car à cause d'unicité des coordonnées  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{v}) \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$  et ici  $\vec{0}$ .

Image/rang : Car  $\text{Im}(h) = \text{vect}(l'image d'une base)$  et  $\text{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = \text{rg}(\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_p)$

### 5.3 Correspondance Matrice-Application linéaire.

#### **Théorème 10. Correspondance Matrice-morphisme**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  une base de  $E$ .

Soit  $E'$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_p\}$  une base de  $E'$ .

La correspondance  $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$   
 qui, à tout morphisme  $h \in \mathcal{L}(E, E')$ , associe la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h)$   
 réalise une bijection de  $\mathcal{L}(E, E')$  sur  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

#### **Conséquences pratiques.**

> Si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(g)$  alors  $f = g$ .

> Si  $A$  est une matrice de taille  $p \times n$ ,  
 alors il existe un unique morphisme  $f$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = A$

Démonstration : La démonstration se fonde sur les théorèmes difficiles du chapitre de révision précédent.

L'injectivité? On suppose que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(g)$ .

On doit démontrer que  $f = g$ .

Avec les décorations sur la matrice, on voit l'image d'une base. De plus deux endomorphismes qui coïncident sur une base sont égaux donc  $f = g$ .

La surjectivité? Soit  $A$  avec les décorations sur la matrice, on voit l'image d'une base. De plus on sait que si l'on fixe l'image d'une base alors l'endomorphisme est complètement défini.

Les compléments sont une conséquence par anticipation des calculs de la section qui suivent.

Fini  $\square$

#### **Théorème 11. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, E')$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**

Je reprends les notations précédentes

> La correspondance  $[f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)]$  est un isomorphisme d'espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E, E')$  sur  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ .

$$\text{Ainsi } \dim(\mathcal{L}(E, E')) = \dim(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})) = n.p = \dim(E) \cdot \dim(E')$$

> La correspondance  $[f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)]$  est un isomorphisme d'anneau de  $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  sur  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$

Démonstration : C'est l'interprétation algébrique des calculs de la section suivantes.

## 6 Exemples/Applications

### 6.1 Matrice des morphismes classiques

**Théorème 12. Matrice des morphismes classiques**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  une base de  $E$ .

Soit  $E'$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_p\}$  une base de  $E'$ .

> La fonction nulle  $0_{E,E'}$  est un morphisme et on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(0_{E,E'}) = \mathcal{O}_{n,p}$

> L'identité de  $E$ , est un morphisme et on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(id_E) = I_n$

> L'homothétie vectorielle de rapport  $\lambda$ , est un morphisme et on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$

Démonstration : Il suffit d'écrire la matrice avec ses décorations et de la remplir.

### 6.2 Fonction $h_A$ associée à une matrice.

**Théorème 13. Fonction associée à une matrice**

Soit  $A \in \text{Mat}_{n,p}(\mathbb{R})$  une matrice de taille  $n \times p$ .

Le fonction associée à la matrice  $A$ , noté  $h_A$ ,

c'est le morphisme de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$\forall \vec{U} \in \mathbb{R}^p, h_A(\vec{U}) = A \cdot \vec{U}$$

On note  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{C}_0$  les bases canoniques de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^n$ .

On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{C}_0}(h_A) = A$$

Conséquence : Soit  $A$  une matrice, CàD un tableau de chiffre sans signification

alors la fonction  $h_A$  est le morphisme qui permet de décorer  $A$ .

Démonstration : On sait que  $\mathcal{B}_0$  c'est la base  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_p)$  et que  $\mathcal{C}_0$  c'est la base  $(\vec{E}'_1, \vec{E}'_2, \dots, \vec{E}'_n)$ .

De plus comme  $h_A(\vec{E}_1) = A\vec{E}_1$ , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{C}_0}(h_A) = \begin{pmatrix} A\vec{E}_1 & A\vec{E}_2 & \dots & A\vec{E}_p \\ \left( \begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) & \begin{array}{l} \leftarrow \vec{E}'_1 \\ \leftarrow \vec{E}'_2 \\ \leftarrow \vec{E}'_n \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\text{De plus } A\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{1,1}\vec{E}'_1 + a_{2,1}\vec{E}'_2 + \dots + a_{n,1}\vec{E}'_n$$

Fini  $\square$

### 6.3 Étudier $\ker(h)$

**Théorème 14. Famille génératrice du noyau**

*Le plan d'étude du noyau d'un morphisme n'est pas modifié avec les matrices  
On détermine une famille génératrice du noyau*

$$\vec{u} \in \ker(h) \iff \begin{cases} \vec{u} \in \mathcal{D} \\ h(\vec{u}) = \vec{0} \end{cases}$$

$\iff$  On traduit  $h(\vec{u}) = \vec{0}$  selon le contexte

$\iff$  Lorsque l'on dispose de la matrice  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(h)$ ,  
on poursuit en utilisant  $h(\vec{u}) = \vec{0} \iff A\vec{U} = \vec{0}$

### 6.4 Étudier $\text{Im}(h)$ et $\text{rang}(h)$

**Théorème 15. Famille génératrice de  $\text{Im}(h)$**

Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et  $h \in \mathcal{L}(E, F)$  un morphisme.

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{\ell})$  est une base du  $\mathcal{D}_{\text{épart}}$ .

On a

> **La grande formule.**  $\text{Im}(h) = \text{vect}(\text{ de l'image d'une base de } \mathcal{D})$

$$= \text{vect}(f(\vec{i}), f(\vec{k}), f(\vec{k}), f(\vec{\ell}))$$

Application :  $f$  est surjective Ssi  $\text{Im}(f) = \text{vect}(f(\vec{i}), f(\vec{k}), f(\vec{k}), f(\vec{\ell})) = F$

Ssi la famille  $(f(\vec{i}), f(\vec{k}), f(\vec{k}), f(\vec{\ell}))$  est une famille génératrice de  $F$ .

Pour étudier l'image, on utilise "la formule",  $\text{Im}(h) = \text{vect}$  (l'image d'une base)  
mais cette formule est mal comprise et finalement mal utilisée

**Théorème 16. Famille génératrice de l'image**

Soit  $h : E \rightarrow E'$  un morphisme

$$\text{et } A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(h) = \begin{pmatrix} h(\vec{e}_1) & h(\vec{e}_2) & \dots & h(\vec{e}_n) \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \vec{f}_1 \\ \leftarrow \vec{f}_2 \\ \vdots \\ \leftarrow \vec{f}_p \end{matrix} = (\vec{C}_1 | \vec{C}_2 | \dots | \vec{C}_n)$$

Thm : La famille de vecteur colonne  $(\vec{C}_1 | \vec{C}_2 | \dots | \vec{C}_n)$  est une "famille génératrice" de  $\text{Im}(h)$

Ainsi on a

> La famille  $(\vec{C}_1 | \vec{C}_2 | \dots | \vec{C}_n)$  étant génératrice, on est pas très loin d'avoir une base

>  $\text{rang}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\text{Im}(h)) = \text{rang}(\vec{C}_1 | \vec{C}_2 | \dots | \vec{C}_n)$   
et ce dernier rang se calcule avec un algorithme de Gauss.

## 7 Changement de base.

### 7.1 Matrice de changement de base.

**Définition 17.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  et  $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$  deux bases de  $E$ .

La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ , notée  $Mat(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$ , c'est la matrice

$$Mat(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \dots & \vec{e}'_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \vec{e}_1 \\ \leftarrow \vec{e}_2 \\ \\ \leftarrow \vec{e}_n \end{matrix}$$

Avec la définition d'une famille de vecteur, on a  $Mat(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

**Théorème 18.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$  des bases de  $E$ .

On a

> La famille  $\mathcal{B}'$  est une base

Ssi  $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = Mat(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$  est une matrice carrée inversible.

> Si  $P = Mat(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$ , alors  $Mat(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}) = P^{-1}$ .

>  $Mat(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'') = Mat(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') \cdot Mat(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}'')$ .

Démonstration :

> On a déjà montré que si  $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = Mat(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$  est une matrice carrée inversible alors la famille  $\mathcal{B}'$  est libre. Et en fait c'est une base à cause de "Libre + cardinal  $\implies$  Base".

Pour la suite, je note  $id_E$  le célèbre automorphisme.

On vérifie "facilement" avec les décorations que  $Mat_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(id_E) = Mat(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = P$

> Comme  $id_E$  est bijectif,  $P$  est inversible

$$\text{et } P^{-1} = Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(id_E^{-1}) = Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(id_E) = Mat(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B})$$

$$> Mat(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') \cdot Mat(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}'') = Mat_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(id_E) \cdot Mat_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}(id_E)$$

$$= Mat_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}(id_E \circ id_E) = Mat_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}(id_E)$$

$$= Mat(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'')$$

Fini  $\square$

## 7.2 Formules de Changement de Base.

### Théorème 19. Formules de Changement de Base

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ .

Soit  $F$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ .

Pour les vecteurs Soit  $\vec{u} \in E$

$$\text{On a } \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(\vec{u}), \text{ C\`aD } \vec{u} = A\vec{u}'$$

Pour les endomorphismes Soit  $h \in \mathcal{L}(E)$

$$\text{On a } \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(h) = \mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(h) \cdot \mathcal{M}at(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}), \text{ C\`aD } A = P A' P^{-1}$$

Pour les morphismes Soit  $h \in \mathcal{L}(E, E')$

$$\text{On a } \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h) = \mathcal{M}at(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}') \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(h) \cdot \mathcal{M}at(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}), \text{ C\`aD } A = Q A' P^{-1}$$

Démonstration :

Pour les vecteurs.

Précédemment on a vu les formules

$$> \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(h(\vec{u})) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h) \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u})$$

$$> \mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(id_E)$$

On applique la première formule avec  $f = id_E$ , attention aux indices.

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(id_E) \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(\vec{u}) = \mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(\vec{u})$$

Pour les morphismes.

Précédemment on a vu les formules

$$> \mathcal{M}at_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ h) = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(h)$$

$$> \mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(id_E)$$

$$> \mathcal{M}at(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}') = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}(id_E) \text{ et } \mathcal{M}at(\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}) = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(id_E)$$

On applique la première formule avec  $g \circ f \circ h$  où  $g = h = id_E$ , attention aux indices.

Pour les endomorphismes.

Précédemment on a vu les formules

$$\text{C'est la formule précédente appliquée avec } \mathcal{F} = E, \mathcal{C} = \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}' = \mathcal{B}'.$$

$$\text{Rappel : } \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(h) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(h) \text{ et } \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(h) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(h)$$

On applique la première formule avec  $g \circ f \circ h$  où  $g = h = id_E$ , attention aux indices.

### 7.3 Les matrices semblables

**Définition 20. Matrices semblables**

> Soit  $A$  et  $A'$  deux matrices carrées.

On dit que la matrice  $A$  est semblable à la matrice  $A'$

Ssi il existe une matrice inversible  $P$  tel que  $A = PA'P^{-1}$ .

> Exemple fondamental :

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Soit  $h \in \mathcal{L}(E)$

Alors les matrices  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h)$  sont semblables

Démonstration : les matrices  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h)$  sont semblables car on sait que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \underbrace{\text{Mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')}_{=P} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h) \cdot \underbrace{\text{Mat}(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B})}_{=P^{-1}}$$

**Théorème 21.**

Relation d'équivalence.

La relation "est semblable à" est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Rappel une relation d'équivalence est : réflexive, transitive et symétrique.

Formulaire

On considère  $A, A'$  des matrices semblable,

ainsi il existe une matrice inversible  $P$  tel que  $A = PA'P^{-1}$ .

On a alors

$$A^p = A \cdot A \cdot \dots \cdot A = (PA'P^{-1})(PA'P^{-1}) \dots (PA'P^{-1}) = P(A')^p P^{-1}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(PA'P^{-1}) \\ &= \det(P) \det(A') \det(P^{-1}) \\ &= \det(P) \det(A') \frac{1}{\det(P)} \\ &= \det(A') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \text{tr}(PA'P^{-1}) \\ &= \text{tr}(A'P^{-1}P) \\ &= \text{tr}(A'I_n) = \text{tr}(A') \end{aligned}$$

## 8 Matrices des Symétries et des Projections.

### Théorème 22. Rappel : Bases et somme directe

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On suppose  $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$

Alors on sait  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$  est une base de  $E$

Soit  $h \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant

$$h \circ h \circ h - 3h \circ h + 2h = 0 \iff h^3 - 2h^2 + 3h = 0$$

Comme  $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2) = (X-0)(X-1)(X-2)$ ,

Alors on saura que :  $E = \ker(h-0id) \oplus \ker(h-1id) \oplus \ker(h-2id)$

et que :  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  est une base de  $E$

$$\text{De plus on a } \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(h) = \left( \begin{array}{c|c|c} \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \hline \mathcal{O} & I & \mathcal{O} \\ \hline \mathcal{O} & \mathcal{O} & 2I \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow \mathcal{B}_0 \\ \downarrow \mathcal{B}_1 \\ \downarrow \mathcal{B}_2 \end{array}$$

### Théorème 23. Application aux projections/symétries

Pour les projections

On suppose que  $p \in \mathcal{L}(E)$  et que  $p \circ p = p \iff p^2 = p$

Comme  $X^2 = X \iff X(X-1) = 0$ ,

on sait que :  $E = \ker(h-0id) \oplus \ker(h-1id)$

et que :  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$  est une base de  $E$

$$\text{De plus on a : } D = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(p) = \left( \begin{array}{c|c} 0_p & 0_{r,p} \\ \hline 0_{p,r} & I_r \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow \mathcal{B}_0 \\ \downarrow \mathcal{B}_1 \end{array}$$

On peut remarquer que  $tr(p) = tr(D) = r = rg(D) = rg(p)$

*Complément.*

Si  $A$  est une matrice vérifiant  $A^2 = A$

alors l'endomorphisme  $h_A$  est une projection et on peut lui appliquer cette théorie.

Pour les symétries

On suppose que  $s \in \mathcal{L}(E)$  et que  $s \circ s = id \iff s^2 = id$

Comme  $X^2 = 1 \iff (X-1)(X+1) = 0$ ,

on sait que :  $E = \ker(h-1id) \oplus \ker(h+1id)$

et que :  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{-1}$  est une base de  $E$

$$\text{De plus on a : } D = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(p) = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,s} \\ \hline 0_{s,r} & -I_s \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow \mathcal{B}_1 \\ \downarrow \mathcal{B}_{-1} \end{array}$$

*Complément.*

Si  $A$  est une matrice vérifiant  $A^2 = I$

alors l'endomorphisme  $h_A$  est une symétrie et on peut lui appliquer cette théorie.