
 Révisions

Exercice 1. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$ et les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $L = (4 \ 5 \ 6) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$

Calculer $\alpha = LC$, $A = CL$ et $B = (CL)^n$

Exercice 2. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

1. Écrire les matrices A et A^T .
2. Pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ On note b_{kk} les coefficients diagonaux de la matrice $A^T.A$.
Calculer b_{kk} puis $\text{tr}(A^T A)$.

Exercice 3. [Correction] Pour tout réel t , on définit la matrice $A_t = A(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$A_t = A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$$

On note $H = \{A(t), t \in \mathbb{R}\}$

1. Est ce que H est un ssev ? Montrer que H est stable par produit.
2. Pour quelles valeurs de t , la matrice $A(t)$ est-elle inversible ?
Son inverse appartient-il à H ?

Exercice 4. [Correction] Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

 Comment calculer A^n .

Exercice 5. [Correction] **Avec le binôme** Soit j la célèbre racine cubique de l'unité.

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & j & j^2 \\ j & -j & 1 \\ j^2 & 1 & -j^2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 . Est ce que A est inversible ?
2. Calculer $N = A - I_3$, N^2 et N^3 .
3. Comment on calculerai A^p et A^{-1}

Exercice 6. Par récurrence. On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Trouver 2 matrices A, B tel que que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = 2^n A + 3^n B$

Exercice 7. [Correction] Avec des suites. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$

Et calculer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n .

2. Calculer a_n et b_n en fonction de n .

3. Calculer c_n en fonction de n

Exercice 8. Avec une division euclidienne.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 en fonction A et de I_2

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 6$

En déduire la valeur de A^n

Blocs

Exercice 9. [Correction] Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Discuter selon X , si la matrice $X I_4 - A$ est inversible.

Matrice d'un vecteur

Exercice 10.

On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base classique/canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (4, 5, 0)$ et $\vec{w} = (6, 0, 0)$

Montrer que la famille $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $\mathcal{C}' = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ sont deux bases de \mathbb{R}^3

et écrire les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ et $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$, $\text{Mat}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C}')$ et $\text{Mat}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C})$

Exercice 11. [Correction]

Écrire la matrice de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)$ dans la base classique/canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Puis déterminer le rang de la famille.

Exercice 12.

Que valent les polynômes P et Q quand on sait que $\text{Mat}_{(X^0, X^1, X^2)}(P, Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 13. [Correction]

Montrer matriciellement que la famille $(2X^2 - 1, X^2 - X + 2, 3X + 4)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 14. [Correction]

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Justifier que $\mathcal{B} = (1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P)$

————— Matrice d'un morphisme —————

Exercice 15. [Correction] Écrire les matrices des fonctions suivantes

1. La fonction nulle, de la fonction id , d'une homothétie vectorielle.

2. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (y - z, z - x, x - y)$

3. $h_A: \mathcal{M}_{31} \rightarrow \mathcal{M}_{31}: \vec{U} \mapsto A\vec{U} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

4. $f: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]: P \mapsto P'$

5. $f: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3: P \mapsto (P(1), P(2), P(3))$

6. $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): M \mapsto M^T$

7. $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}: M \mapsto tr(AM) \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 16. [Correction] Soit h le morphisme $h: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2; P \mapsto (P(1) - P'(1), P(2))$.

Déterminer A la matrice (dans les bases canoniques) de h .

En utilisant A déterminer une base et la dimension du noyau de h ainsi que $rg(h) = rg(A)$, le rang de h .

Exercice 17. [Correction] Soit h la fonction $h: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]; P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que h est endomorphisme $\mathbb{R}_3[X]$ et que plus précisément h est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$

2. Déterminer A la matrice (dans la base canonique) de h .

3. En déduire $rg(h)$ et que $\text{Im}(h) = \mathbb{R}_2[X]$ et $\text{ker}(h) = \mathbb{R}_0[X]$

4. **Complément** Reprendre et adapter l'exercice avec $\mathbb{R}_n[X]$ à la place de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 18. [Correction] Soit h la fonction $h: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); M \mapsto AM - MA$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que h est endomorphisme et déterminer A la matrice (dans les bases canoniques) de h .

2. En déduire $rg(h)$ et $\dim(\text{ker}(h))$.

3. En déduire que (I_2, A) est une base de $\text{com}(A) = \text{ker}(h)$.

Que peut-on en déduire sur A^2 ou A^3 ou ... A^n ou A^{-1} .

Exercice 19. [Correction] Soit h la fonction $h: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]; P \mapsto P(X+1)$.

1. Montrer que h est endomorphisme et déterminer A la matrice (dans les bases canoniques) de h .

2. En utilisant A , justifier h est un automorphisme et **sans utiliser** A déterminer h^{-1}

3. Déterminer A^{-1}

Exercice 20. [Correction] Soit \mathcal{B} la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit h l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$h(P) = 2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P'$$

1. Montrer que $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$. Calculer $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$.

2. Est ce que h est un automorphisme ?

3. Montrer que $\mathcal{C} = [1, X-1, (X-1)^2]$ est une base. Calculer $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(h)$.

4. **En déduire** que $(h - 4id)^3 = 0$. Que pourrait-on faire de cet information ?

————— Décorer une matrice —————

Exercice 21. [Correction] Soit h le morphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$

$$\text{dont la matrice dans les base canonique est } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Décorer la matrice puis calculer $h(3X^3 - X + 2)$

Exercice 22. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et h_A le morphisme qui lui est associée.

1. Décrire h_A

2. Montrer que $\mathcal{B}' = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$ est une base de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$

3. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h_A(\vec{u}))$, CàD les coordonnées de $h_A(\vec{u})$ dans la base \mathcal{B}' .

4. Déterminer $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h_A)$

————— Changement de base - Diagonaliser - Trigonaliser —————

Exercice 23. Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer des vecteurs \vec{u} et \vec{v}

$$\text{tel que } \mathcal{B}' = (\vec{i}, \vec{u}, \vec{v}) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h) = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 24. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) une base de $\text{Ker}(h_A + I_3)$.

2. Déterminer \vec{e}_3 une base de $\text{Ker}(h_A - 5I_3)$.

3. Vérifier que $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

4. Écrire $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h_A)$. Donner le lien entre A et D .

Exercice 25. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

On note aussi h_A la fonction associée à la matrice A .

1. Déterminer une base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tel que $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Méthodologie.

- > Décorer la matrice D . En déduire une équation vérifier par \vec{e}_i
- > Trouver \vec{e}_i
- > Conclure.

2. Déterminer une matrice P tel que $A = PDP^{-1}$.

3. Applications

(a) Comment on calculerait A^n ?

(b) Soit M une matrice et $N = P^{-1}MP$.

- > Montrer que : $AM = MA \iff ND = DN$.
- > Déterminer N .
- > Que peut-on conclure.

Exercice 26. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

On note aussi h_A la fonction associée à la matrice A .

1. En suivant la même démarche que pour l'exercice précédente,

trouver une base \mathcal{B}' tel que $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Déterminer le lien entre A et T .

3. Applications. (Voir l'exercice ci-dessus.)

Exercice 27. Soit $\mathcal{B} = (X^0, X^1, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], h(P) = \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right]$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$.

2. Soit les polynômes $P_0 = 1$, $P_2 = -2X + 1$ et $P_3 = 6X^2 - 6X + 1$ et la famille $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$.

(a) Déterminer $\text{Mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. Est ce que \mathcal{B}' est une base $\mathbb{R}_2[X]$?

(b) Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h)$.

————— Montrer que $f = g$ —————

Exercice 28. [Correction] Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, CàD une fonction linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} , vérifiant

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \phi(AB) = \phi(BA).$$

On va montrer qu'il existe λ tel que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \phi(A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$.

Soit $\mathcal{B} = (E_{ij})$ la base classique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $E_{ij}E_{k\ell} = \begin{cases} 0 & \text{Si } j \neq k \\ E_{i,\ell} & \text{Si } j = k \end{cases}$
2. En remarquant que $E_{ij} = E_{ik}E_{kj}$, montrer que
 - > Si $i \neq j, \phi(E_{ij}) = 0$.
 - > $\phi(E_{11}) = \phi(E_{22}) = \dots = \phi(E_{nn})$.
3. conclure.

Exercice 29. On veut déterminer $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices, i.e.

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}.$$

1. Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $ME_{ij} - E_{ij}M$.
2. Montrer que : $M \in \mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \Leftrightarrow [\exists \lambda \in \mathbb{R}, M = \lambda I_n]$.
3. Application : Soit f un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ qui commute avec tous les endomorphismes.
Montrer que f est une homothétie.

————— Construire des bonnes bases. Niveau 1 —————

Dans ces exercices, on construit de base qui reflète le contexte (CàD on commence par le "plus petit" puis on utilise le théorème de la base incomplète) puis on utilise cette base pour fabriquer une morphisme ou pour montrer que deux morphismes sont égaux

Exercice 30. [Correction] Une forme linéaire est un morphisme $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Soit $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire *non nulle*. Montrer que $H = \ker(\varphi)$ est un hyperplan.
2. On va montrer la réciproque. Soit H un hyperplan de E .

(a) Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n de la forme $\mathcal{B} = \left(\begin{array}{c} \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n \\ \text{Une base de } H \end{array} \right)$

(b) Fabriquer une forme linéaire ϕ tel que $\ker(\phi) = H$

D'après le théorème difficile, pour fabriquer ϕ , il "suffit" de donner la valeur de $\phi(\vec{e}_k)$

Exercice 31. Démonstration de formule de Grassmann

Soit F et G deux ssev de E

On suppose que $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$ est une base de $F \cap G$

> On complète cette famille libre avec $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$ en une base de F .

> On complète cette famille libre avec $(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_r)$ en une base de G .

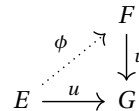
1. Montrer que $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_r)$ est une famille génératrice de $F + G$
2. Montrer que $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_r)$ est une famille libre.
3. En déduire la formule de Grassmann

Exercice 32. [Correction] Soit $u : E \rightarrow G$ et $v : F \rightarrow G$ deux morphismes.

On va montrer l'équivalence entre

(i) $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(v)$

(ii) il existe $\phi : F \rightarrow G$ tel que $u = v \circ \phi$



1. On suppose qu'il existe $\phi : E \rightarrow F$ tel que $u = v \circ \phi$. Montrer que : Montrer que $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(v)$
2. On suppose que : $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(v)$. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E
 - (a) Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Montrer qu'il existe $\vec{y}_k \in F$ tel que $v(\vec{y}_k) = u(\vec{e}_k)$
 - (b) Montrer qu'il existe $\phi : E \rightarrow F$ tel que $u = v \circ \phi$

Exercice 33. [Correction] Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n .

Soit f un endomorphisme nilpotent d'ordre n , CàD $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$

1. Montrer qu'il existe $\vec{e} \in E$ tel que $\mathcal{B} = (\vec{e}, h(\vec{e}), \dots, f^{n-1}(\vec{e}))$ est une base de E
2. Soit g un endomorphisme de E tel que $g \circ f = f \circ g$
 Montrer que $g \in \text{vect}(id, f, f^2, \dots, f^{n-1})$
Indication : On commencera par décomposer $g(\vec{e})$ dans la base \mathcal{B}

— Construire des bonnes bases. Niveau 2 —

Dans ces exercices, on construit de base qui reflète le contexte (CàD on commence par le "plus petit" puis on utilise le théorème de la base incomplète) puis on transporte cette base qui fournira une famille libre qui permettra de fabriquer une base

Exercice 34. Deux petits lemmes

- Soit $f : E \rightarrow E'$ un isomorphisme.
Montrer l'image d'une base est une base. Ainsi $\dim(E) = \dim(E')$
- Soit $f : E \rightarrow E'$ un morphisme et $\mathcal{B} = \left(\underbrace{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_p}_{\text{Base de } \ker(h)}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_q \right)$ une base.
Montrer que $(h(\vec{e}_1), \dots, h(\vec{e}_q))$ est une famille libre

Exercice 35. Démonstration de la formule du rang

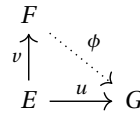
Soit $\mathcal{D} = E$ un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et $h : E \rightarrow F$ un morphisme.

- Fabriquer une base \mathcal{B} de E de la forme $\left(\underbrace{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_p}_{\text{Base de } \ker(h)}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_q \right)$
- Démontrer que $(h(\vec{e}_1), \dots, h(\vec{e}_q))$ est une base de $\text{Im}(h)$
- Conclure

Exercice 36. [Correction] Soit $u : E \rightarrow G$ et $v : E \rightarrow F$ deux morphismes.

On va montrer l'équivalence entre

- $\ker(v) \subset \ker(u)$
- il existe $\phi : F \rightarrow G$ tel que $u = \phi \circ v$



- On suppose qu'il existe $\phi : F \rightarrow G$ tel que $u = \phi \circ v$. Montrer que $\ker(v) \subset \ker(u)$
- On suppose que $\ker v \subset \ker u$.
 - Construire une base de E qui illustre $\ker(v) \subset \ker(u) \subset E$.
 - Construire une base de F (à partir de celle de E et de v)
 - Montrer qu'il existe $\phi : F \rightarrow G$ tel que $u = \phi \circ v$

Exercice 37. [Correction] Soient E un espace vectoriel de dimension fini et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(u) = \text{Im}(u)$

Montrer que

- > $\dim(E)$ est un nombre pair
- > il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $v \circ u + u \circ v = id_E$

Exercice 38. Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$. Soit V est un sous-espace de E

On dit que V est hypo-stable s'il existe un hyperplan H de V tel que $h(H) \subset V$.

- Montrer que si V est hypo-stable et $h(V) \not\subset V$, alors H est unique.
- Montrer que si V est hypo-stable sans être stable, alors V est un hyperplan de $V + h(V)$. Étudier la réciproque.
- Montrer que si V est hypo-stable, il existe un sous-espace X de E dont V est un hyperplan et qui soit encore hypo-stable

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

On trouve

$$> \alpha = L.C = 4 + 10 + 18 = 32 \in \mathbb{R}.$$

$$> A = CL = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (4 & 5 & 6) \\ \left[\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{array} \right] \end{matrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$> B = A^n = (CL)(CL)\cdots(CL) = C(LC)(LC)\cdots(LC)L = C(32)(32)\cdots(32)L = 32^{n-1}CL = 32^{n-1}A$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad ET \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$b_{kk} = (a_{1k})^2 + (a_{2k})^2 + \cdots + (a_{nk})^2 = \text{la somme de tous les carrés des coefficients de la colonne } n^{\circ}k \text{ de la matrice } A.$$

$$\text{Ainsi } tr(A^T A) = b_{11} + \cdots + b_{nn} = \text{la somme de tous les carrés des coefficients de la matrice } A.$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

On a

$$A_t = A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_J = I_3 + tJ$$

$$\text{On a donc : } A \in H \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R}, A = I_3 + tJ$$

1. H n'est pas un ssev car $0 \notin H$.

On va maintenant montrer que \mathcal{M} est stable par produit

On suppose que $M, M' \in H$

On va montrer que $M.M' \in H$

On a

$$\begin{aligned} M.M' &= (I_3 + tJ)(I_3 + t'J) \\ &= I_3 + (t+t')J + t t' J^2 \\ &\quad \text{Or } J^2 = -2J \quad \text{Calcul à faire.} \\ &= I_3 + (t+t'-2t t')J \in H \end{aligned}$$

On a montré que : H était stable par produit et que : $A(t).A(t') = A'(t+t'-2t t')$

2. On a $\det(A_t) = \dots = (1-2t)^2$ donc la matrice A_t est inversible Ssi $t \neq \frac{1}{2}$

Pour tout $t \neq 1/2$. On cherche t' tel que ; $A(t)A(t') = I_3$

Comme $A(t)A(t') = A(t+t'-2t t')$, on a

$$A(t)A(t') = I_3 \iff A(t+t'-2t t') = I_3 \iff t+t'-2t t' = 0 \iff t' = \frac{-t}{1-2t}$$

$$\text{Lorsque } t \neq \frac{1}{2}, \text{ la matrice } A_t \text{ est inversible et } (A_t)^{-1} = A\left(\frac{-t}{1-2t}\right)$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

Comme $\det(A) = \dots = 1$, la matrice est inversible

$$\text{De plus } A\vec{X} = \vec{Y} \iff \dots \iff \vec{X} = A^{-1}\vec{Y}.$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. On trouve : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2j & 2j^2 \\ 2j & 1+2j^2 & 2 \\ 2j^2 & 2 & 1+2j \end{pmatrix}$ et $\det(A) = 1$.

2. On a $N = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

Ainsi $N^2 = \mathcal{O}_3$ donc la matrice est nilpotente d'ordre 2.

3. On a

$$A^p = (I + N)^p = \text{On peut utiliser la formule du binôme car c'est de la forme } (1+x)^p$$

$$= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} N^k$$

$$= \underbrace{1}_{k=0} N^0 + \underbrace{p}_{k=1} N^1 + \underbrace{\binom{p}{2}}_{k=2} N^2 + \dots$$

$$\text{Or } N^0 = I_3, \text{ et } N^2 = N^3 = \dots = \mathcal{O}_3$$

Donc la somme se réduit au 2 premiers plateaux

$$= I_3 + pN = \begin{pmatrix} 1+p & pj & pj^2 \\ pj & 1+pj^2 & p \\ pj^2 & p & 1+pj \end{pmatrix}$$

Comme $A = I + N$ et $N^2 = \mathcal{O}$, on a $(A - I)^2 = A^2 - 2A + I = \mathcal{O}$.

Donc on trouve (méthode des polynômes)

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 0 & -j & -j^2 \\ -j & 1-j^2 & - \\ -j^2 & -1 & 1-j \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. Facile par récurrence, car

$$A^{n+1} = A.A^n = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a a_n & a c_n + c b_n \\ 0 & b b_n \end{pmatrix}$$

Ainsi on a $a_{n+1} = a a_n$, $b_{n+1} = b b_n$ et $c_{n+1} = a c_n + c b_n$.

2. À la mode géo, on a $a_n = a^n$ et $b_n = b^n$.

3. **Plus difficile** Comme la suite (c_n) vérifie la relation de récurrence

$$\underbrace{c_{n+1} = a c_n + c b^n}_{\text{modèle arithmético-gro}} \iff \underbrace{c_{n+1} - a c_n}_{\text{partir homogène}} = \underbrace{c b^n}_{\text{2-ième membre}}$$

On sait que (c_n) est la somme

> D'une suite (h_n) particulière solution de l'eq complète de la forme : $\forall n \in \mathbb{N}, h_n = K b^n$

> Des suites (g_n) solution de l'eq homogène

À la fin, on trouve $\forall n c_n = c \frac{a^n - b^n}{a - b}$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

On a

$$\begin{aligned} \det(A - x I_4) &= \det \begin{pmatrix} 3-x & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1-x & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2-x & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 2-x \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 3-x & 1 & & \\ -4 & -1-x & & \\ & & 2-x & 1 \\ & & -1 & 2-x \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ -1 & 2-x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice est triangulaire par bloc

$$= (\text{Poly de degré 2}) (\text{Poly de degré 2}) = \text{À finir}$$

Solution de l'exercice 11 (Énoncé)

On a

$$\mathcal{Mat}_{(E_{11}, \dots, E_{22})} \left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 13 (Énoncé)

On a

$$\mathcal{Mat}_{(X^0, X^1, X^2)} (2X^2 - 1, X^2 - X + 2, 3X + 4) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

La famille est libre (à cause des degrés) dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus $\text{cardinal} = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ donc c'est bien une base. Comme $\deg(P) \leq n$, on a formule de Taylor assure que :

$$P = P(a) + P'(a)X + P''(a)\frac{X^2}{2!} \dots + P^{(n)}(a)\frac{X^n}{n!}$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} P(a) \\ P'(a) \\ P''(a)/2! \\ \vdots \\ P^{(n)}(a)/n! \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

1. $\mathcal{Mat}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\mathcal{Mat}(h) = A$

3. $\mathcal{Mat}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\mathcal{Mat}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

5. $\mathcal{Mat}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\mathcal{Mat}(h) = (1, 1, 1, 1)$

Solution de l'exercice 16 (Énoncé)

On a

$$A = \mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{L}}(h) = \begin{matrix} & h(X^0) & h(X^1) & h(X^2) & \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix} \right) & \leftarrow \vec{i} \\ & & & & \leftarrow \vec{j} \end{matrix}$$

Solution de l'exercice 17 (Énoncé)

- Montrer que h est endomorphisme $\mathbb{R}_3[X]$ et que plus précisément h est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$
- On a

$$A = \mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{matrix} & h(X^0) & h(X^1) & h(X^2) & h(X^3) & \\ \left(\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right) & \leftarrow X^0 \\ & & & & & \leftarrow X^1 \\ & & & & & \leftarrow X^2 \\ & & & & & \leftarrow X^3 \end{matrix}$$

En déduire $rg(h)$

3. En déduire que $\text{Im}(h) = \mathbb{R}_2[X]$ et $\text{ker}(h) = \mathbb{R}_0[X]$

4. Complément

- > La linéarité est facile.
- > De plus h est à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, en effet

$$\begin{aligned}
 h(P) &= P(X+1) - P(X) = [a(X+1)^n + \dots] - [ax^n + \dots] & (1) \\
 &= [ax^n + \dots] - [ax^n + \dots] = \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{Des termes de deg } \leq n-1} & (2)
 \end{aligned}$$

> On a

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix}
 h(X^0) & h(X^1) & h(X^2) & h(X^3) & \dots & h(X^n) \\
 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & \binom{n}{1} \\
 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & \binom{n}{2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{n}{n-1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow X^0 \\ \leftarrow X^1 \\ \leftarrow X^2 \\ \vdots \\ \leftarrow X^{n-1} \\ \leftarrow X^n \end{matrix}$$

Comme la matrice est déjà triangulaire et de taille $(b+1) \times (n+1)$, ainsi on a $\text{rg}(h) = \text{rg}(A) = n$.

> On a maintenant $\text{Im}(h) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\dim(\text{Im}(h)) = \text{rg}(h) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$

Donc $\text{Im}(h) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Avec le théorème du rang, on a $\dim(\text{Ker}(h)) = 0$ et on lit sur la matrice A que $h(X^0) = 0$

Donc X^0 est un vecteur non nul de $\text{ker}(h)$, c'est donc une base et $\text{ker}(h) = \text{Vect}(X^0) = \mathbb{R}_0[X]$.

Solution de l'exercice 18 (Énoncé)

1. h est endomorphisme : Facile

De plus on a

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix}
 h(E_{11}) & h(E_{21}) & h(E_{12}) & h(E_{22}) \\
 0 & & & \\
 2 & & & \\
 -3 & & & \\
 0 & & &
 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow E_{11} \\ \leftarrow E_{21} \\ \leftarrow E_{12} \\ \leftarrow E_{22} \end{matrix}$$

2. On a $\text{rg}(h) = \text{rg}(A) = \text{Avec Gauss} = 2$ et $\dim(\text{ker}(h)) = \dim(\mathcal{D}_{\text{épart}}) - \text{rg}(h) = 4 - 2 = 2$.

3. La famille (I_2, A) est libre car non // et dans $\text{ker}(h)$ car $AI - IA = 0$ et $AA - AA = 0$
de plus $\text{cardinal} = 2 = \dim(\text{ker } h)$ Donc c'est une base de $\text{com}(A) = \text{ker}(h)$.

On a $A^2 \in \text{ker}(h)$ car $A^2 A = A A^2$ et (I, A) est une base de $\text{ker}(h)$

Donc A^2 est une CL, CàD il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $A^2 = \alpha I + \beta A$

Kulture pas inutile. $M \in \text{ker } h \iff AM - M = 0 \iff AM = MA$
Conclusion : $M \in \text{ker } f \iff$ la matrice M commute avec A .
 D'où le vocabulaire $\text{ker } f$, c'est le commutant de A .

Solution de l'exercice 19 (Énoncé)

> h est un endomorphisme : facile

> On a

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} h(X^0) & h(X^1) & h(X^2) & h(X^3) & \dots & h(X^n) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \binom{n}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow X^0 \\ \leftarrow X^1 \\ \leftarrow X^2 \\ \vdots \\ \leftarrow X^{n-1} \\ \leftarrow X^n \end{matrix}$$

- > La matrice est triangulaire donc $\det(A) = \text{le produit des éléments diagonaux} = 1.1\dots 1 = 1 \neq 0$
 Donc la matrice A est inversible et l'endomorphisme h est bijectif, c'est un automorphisme.
- > La fonction $g : P \rightarrow P(X-1)$ est la bijection réciproque de h

$$\text{car } [g \circ h](P) = g(h(P)) = g(P(X+1)) = P(\square+1) \text{ avec } \square = X-1$$

> On sait que $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$

$$\text{Ainsi } A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} g(X^0) & g(X^1) & g(X^2) & g(X^3) & \dots & g(X^n) \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \dots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \dots & (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & (-1)^{n-3} \binom{n}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & -\binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1)^n \leftarrow X^0 \\ \leftarrow X^1 \\ \leftarrow X^2 \\ \vdots \\ \leftarrow X^{n-1} \\ \leftarrow X^n \end{matrix}$$

Solution de l'exercice 20 (Énoncé)

1. **Montrer que $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.** On doit montrer linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$

Linéaire ?.

On a bien $h(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$.

Pour tout λ, μ et tout $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned} h(\lambda P + \mu Q) &= 2(X+1)[\lambda P + \mu Q] - (X^2 - 2X + 1)[\lambda P + \mu Q]' \\ &= 2(X+1)[\lambda P + \mu Q] - (X^2 - 2X + 1)[\lambda P' + \mu Q'] \\ &= \lambda [2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P'] + \mu [2(X+1)Q - (X^2 - 2X + 1)Q'] \\ &= \lambda h(Q) + \mu h(P) \end{aligned}$$

À valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$?.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire $P = aX^2 + bX + c$ et

$$\begin{aligned} h(P) &= 2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P' \\ &= 2(X+1)[aX^2 + \dots] - (X^2 - 2X + 1)[2X + \dots] \\ &= X^3[2a - 2a] + \text{Coef de degré } \leq 2 \end{aligned} \quad \boxed{\text{donc } h(P) \in \mathbb{R}_2[X]}$$

2. Calcul dans \mathcal{B}

Calculer $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$

Pour écrire A , on a besoin de

$$> h(X^0) = 2(X+1)X^0 - (X^2 - 2X + 1)\mathcal{O} = 2X^0 + 2X^1 + 0X^2$$

$$> h(X^1) = 2(X+1)X^1 - (X^2 - 2X + 1)1 = (-1)X^0 + 4X^1 + 1X^2$$

$$> h(X^2) = 2(X+1)X^2 - (X^2 - 2X + 1)2X = 0X^0 + (-2)X^1 + 6X^2$$

$$\text{Conclusion : } A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Est ce que h est un automorphisme ?

Comme $\det(A) = \dots = 64 \neq 0$ donc A est inversible et h est bijectif, ainsi h est un automorphisme

3. Calcul dans \mathcal{C}

Montrer que $\mathcal{C} = [1, X-1, (X-1)^2]$ est une base.

$$\text{Soit } P \text{ la matrice de passage. On a } P = \text{Mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\det(P) = 1 \neq 0$ donc P est inversible et \mathcal{C} est une base

Calculer $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(h)$.

Pour écrire B , on a besoin des coordonnées de $h(X^0)$, $h(X-1)$ et $h(X^2-2X+1)$ dans la base $\mathcal{C} = [1, X-1, (X-1)^2]$

$$> h(X^0) = 2(X+1)X^0 - (X^2 - 2X + 1)\mathcal{O} = 2(X+1) = 4X^0 + 2(X-1) + 0(X-1)^2$$

$$> h(X-1) = A \cdot \vec{U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$> h(X^2 - 2X + 1) = \text{\AA faire avec la m\u00e9thode de votre choix}$

$$\text{Conclusion : } B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(h) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Donner le lien matriciel qu'il y a entre \mathcal{B} et \mathcal{C} .

La formule de changement de base est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \text{Mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{C}}(h) \cdot \text{Mat}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}), \text{ C\AA D } A = PBP^{-1}$$

5. En d\u00e9duire que $(h-4id)^3 = \mathcal{O}$.

On a $(h-4id)^3 = \mathcal{O} \iff (A-4I_3)^3 = \mathcal{O} \iff (B-4I_3)^3 = \mathcal{O}$

Il est clair que la matrice B est plus "sympa", on va l'utiliser

$$\text{On a facilement } B-4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ainsi}$$

$$(B+4I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $(B+4I_3)^3 = \mathcal{O}$ ainsi on a bien $(h-4id)^3 = \mathcal{O}$

Solution de l'exercice 21 (Énoncé)

Comme h est lin\u00e9aire, on a

$$h(3X^3 - X + 2) = 3h(X^3) - h(X) + 2h(1) = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow X^0 \\ \leftarrow X^1 \\ \leftarrow X^2 \end{matrix} = 3X^2 + 7X + 1$$

On utilise la matrice correctement d\u00e9corr\u00e9e

Solution de l'exercice 28 (Énoncé)

1. On prend $\mathcal{B} = (E_{ij})$ et $\mathcal{C} = (1)$, ainsi la matrice $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(tr)$ est de taille 1 ligne, n^2 colonnes.
De plus $\forall i, tr(E_{ii}) = 1$ et $\forall i \neq j, tr(E_{ij}) = 0$

$$\text{Ainsi } A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(tr) = \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{n \text{ coef}} \underbrace{(0, 1, \dots, 0)}_{n \text{ coef}} \underbrace{(0, 0, 1, \dots, 0)}_{n \text{ coef}} \dots \underbrace{(0, \dots, 0, 1)}_{n \text{ coef}}$$

2. On va déterminer $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\phi)$
- (a) **Kulture** On trouve (Attention aux indices.)
Si $j = k$, on trouve $E_{ij}E_{jl} = E_{il}$
Si $j \neq k$, on trouve $E_{ij}E_{kl} = \mathcal{O}$
- (b) En remarquant que $E_{ij} = E_{ik}E_{kj}$, montrer que

- > Comme $1 \neq 2$, on a $\phi(E_{12}) = \phi(E_{11}E_{12}) = \phi(E_{12}E_{11}) = \phi(\mathcal{O}) = 0$.
On fait de même pour E_{ij} quand $i \neq j$
> $\phi(E_{22}) = \phi(E_{21}E_{12}) = \phi(E_{12}E_{21}) = \phi(E_{11})$.
On fait de même pour E_{ii}

- (c) On note $\lambda = \phi(E_{11})$. Ainsi $\forall i, \phi(E_{ii}) = \lambda$ et $\forall i \neq j, \phi(E_{ij}) = 0$

$$\text{Ainsi } B = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\phi) = \underbrace{(\lambda, 0, \dots, 0)}_{n \text{ coef}} \underbrace{(0, \lambda, \dots, 0)}_{n \text{ coef}} \underbrace{(0, 0, \lambda, \dots, 0)}_{n \text{ coef}} \dots \underbrace{(0, \dots, 0, \lambda)}_{n \text{ coef}}$$

3. Comme $B = \lambda A$, on a bien $\phi = \lambda tr$

Solution de l'exercice 30 (Énoncé)

1. Comme $\varphi \neq 0$, on $\text{Im}(\varphi)$ est un ssev non réduit à $\{\vec{0}\}$ de $\mathcal{A} = \mathbb{R}$
Donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.

On conclut avec le théorème du rang.

2. On va montrer la réciproque. Soit H un hyperplan de E .
- (a) On prend une base de H que l'on complète.
- (b) On définit le morphisme ϕ par : $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1} \xrightarrow{\phi} 0$ et $\vec{e}_n \xrightarrow{\phi} 42$
On vérifie "facilement" que $\ker(\phi) = H$

Solution de l'exercice 32 (Énoncé)

1. facile
2. On suppose que : $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(v)$. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E
- (a) Facile car $u(\vec{e}_k) \in \text{Im}(u)$
- (b) On définit le morphisme ϕ par : $\vec{e}_k \xrightarrow{\phi} \vec{y}_k$ et $\vec{e}_n \xrightarrow{\phi} 42$.
Les morphismes u et $v \circ \phi$ sont égaux car ils coïncident sur la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

Solution de l'exercice 33 (Énoncé)

1. Base "classique". Libre \oplus cardinal
2. On a $g(\vec{e}) \in E$ et \mathcal{B} est un base donc il existe des scalaires tel que $g(\vec{e}) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(\vec{e})$

Conclusion : On a alors : Les morphismes g et $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ sont égaux car ils coïncident sur la base \mathcal{B}

Solution de l'exercice 36 (Énoncé)

1. Facile
2. On suppose que $\ker v \subset \ker u$.
- (a) On prend une base de $\ker(v)$ que l'on complète en une base de $\ker(u)$ que l'on complète en une base de E
Ainsi on a $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{u}_1, \dots, \vec{e}_1, \dots)$ est une base de E
- (b) On considère l'image de cette base par v , CàD $(\vec{0}, \dots, v(\vec{u}_1), \dots, v(\vec{e}_1))$.
À cause du petit lemme, la famille $(v(\vec{u}_1), \dots, v(\vec{e}_1), \dots)$ est libre dans F
On la complète ainsi $(v(\vec{u}_1), \dots, v(\vec{e}_1), \dots, \vec{f}_1, \dots)$ une base de F .
- (c) Je définis ϕ par

$$v(\vec{u}_1) \xrightarrow{\phi} \vec{0} = u(\vec{u}_1) \quad v(\vec{e}_1) \xrightarrow{\phi} u(\vec{e}_1) \quad v(\vec{f}) \xrightarrow{\phi} \overrightarrow{\text{Qui on veut dans } \vec{G}}$$

Les morphismes u et $\phi \circ v$ sont égaux car ils coïncident sur la base \mathcal{B}

Solution de l'exercice 37 (Énoncé) Avec le théorème du rang, on a facilement $\dim(E) = 2p$ est un nombre pair

Je choisis $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de $\ker(u)$

Comme $\ker(u) = \text{Im}(u)$, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, il existe \vec{a}_k tel que $u(\vec{a}_k) = \vec{e}_k$

On vérifie "facilement" que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$ est une base de E

De plus $\vec{a}_k \xrightarrow{u} \vec{e}_k$ et $\vec{e}_k \xrightarrow{u} \vec{0}$

Je définis v par

$$\vec{e}_k \xrightarrow{v} \vec{a}_k \text{ et } \vec{a}_k \xrightarrow{v} \vec{0}$$

Les morphismes $v \circ u + u \circ v$ et id_E sont égaux car ils coïncident sur la base \mathcal{B}