

**Exercice 1.** On se place dans  $\mathbb{R}_2[X]$  et on note  $\mathcal{B} = (X^0, X, X^2)$  sa base canonique.

On considère les fonctions définies sur  $\mathbb{R}_2[X]$

$$f : P \mapsto \frac{1}{2} \left[ P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right]$$

$$\phi : P \mapsto P(1)$$

- Justifier que  $\phi$  est une forme linéaire, CàD linéaire et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .  
Déterminer sa matrice.
- Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .  
Écrire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  
L'application  $f$  est-elle bijective ?
- Soit la famille  $\mathcal{C} = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1)$ .  
Justifier que  $\mathcal{C}$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .  
Déterminer  $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ .

**Exercice 2.** [Correction]

On travaille dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .  
 $I$  désigne la matrice identité et  $\mathcal{O}$  la matrice nulle.

On pose  $G = \{M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$  où  $M_{a,b}$  désigne la matrice  $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ .

On note  $E$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^3$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ .

On considère :  $M = M_{a,b}$  un élément de  $G$  avec  $b \neq 0$   
 $u$  l'endomorphisme de  $E$  canoniquement associé à  $M$ . Ainsi  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$   
 $I_E$ , la fonction identité de  $E$ .

- Ssev**
  - Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  et déterminer une base et sa dimension.
  - Vérifier que  $G$  est stable pour le produit.
- Base.**
  - Déterminer une base  $(e'_1)$  de  $E_1 = \ker(u - (a+2b).I_E)$ .
  - Déterminer une base  $(e'_2, e'_3)$  de  $E_2 = \ker(u - (a-b).I_E)$ .
  - Montrer que  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $E$ ; on la note  $\mathcal{B}'$ .
  - Déterminer la matrice  $D$  de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**Exercice 3.** [Correction] On considère

$$E = \text{Vect}(\sin(x), x \sin(x), \cos(x), x \cos(x))$$

On considère l'application  $D$  qui, à une fonction  $f \in E$ , associe sa fonction dérivée  $f'$ .

On a donc  $\forall f \in E, D(f) = f'$

1. **Base/CL.**

(a) Montrer que  $\mathcal{B} = (\sin(x), x \sin(x), \cos(x), x \cos(x))$  est une base de  $E$ .

(b) Montrer que  $D$  est un endomorphisme de  $E$ .

(c) Montrer que les fonctions constantes non-nulle n'appartiennent pas  $E$ .

2. **Matrice dans  $\mathcal{B}$**

(a) Déterminer  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(D)$ .

Retrouver que  $D$  est un automorphisme de  $E$ .

(b) Déterminer  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(D^2 + id)$ . Rappel :  $D^2 = D \circ D$ .

En déduire une base de  $\ker(D^2 + id)$ .

(c) Calculer  $B^2$ .

Retrouver que  $A$  est un inversible et déterminer  $A^{-1}$  en fonction  $A$ .

Déterminer  $D^{-1}$  en fonction  $D$ .

3. **Matrice dans  $\mathcal{C}$ .** On considère la famille  $\mathcal{C} = (e^{ix}, x e^{ix}, e^{-ix}, x e^{-ix})$

(a) Montrer que la famille  $\mathcal{C}$  est une base  $E$ .

(b) Déterminer  $A' = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(D)$ .

(c) En remarquant que  $A'$  est diagonale par bloc et que les blocs sont de la forme  $\lambda I + N$ , calculer  $(A')^n$ .

— Exercices sans matrice, plus difficile et facultatif —

**Exercice 4.** [Correction]  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels de dimension finie et  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ .

$$\text{On va montrer que } \text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \iff \begin{cases} \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\} \\ \text{ker}(f) + \text{ker}(g) = E \end{cases}$$

Rappel :  $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$

1. Montrer que :  $\text{Im}(f + g) \subset [\text{Im}(f) + \text{Im}(g)]$ .  
En déduire une inégalité reliant  $\text{rg}(f + g)$ ,  $\text{rg}(f)$ ,  $\text{rg}(g)$  avec  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Im}(g)$ .
2. On suppose  $\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ .
  - (a) En déduire :  $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ , et montrer :  $\text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$ .
  - (b) Soit  $x \in E$ . montrer :  $\exists t \in E$  tel que  $f(x) = (f + g)(t)$ .
  - (c) Montrer :  $t \in \text{Ker}(g)$  et  $x - t \in \text{Ker}(f)$ .
  - (d) Conclure :  $\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \implies \begin{cases} \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\} \\ \text{ker}(f) + \text{ker}(g) = E \end{cases}$
3. La réciproque. On suppose que :  $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$  et  $\text{ker}(f) + \text{ker}(g) = E$   
Montrer que :  $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f + g)$  puis que  $\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$

**Exercice 5.** les hyperplans de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d \geq 1$  un entier.

1. Pour tout vecteur  $u = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ , on pose :

$$H_u = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d a_i \cdot x_i = 0 \right\}.$$

- (a) Soit  $u \in \mathbb{R}^d$ .  
Montrer que l'ensemble  $H_u$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^d$  si et seulement si le vecteur  $u$  est non nul dans  $\mathbb{R}^d$ .
  - (b) Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs non nuls de  $\mathbb{R}^d$ .  
Montrer que si les vecteurs  $u$  et  $v$  sont colinéaires, alors :  $H_u = H_v$ .
  - (c) Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs non nuls de  $\mathbb{R}^d$  tels que  $H_u = H_v$ . On pose  $u = (a_1, \dots, a_d)$  et  $v = (b_1, \dots, b_d)$ .
    - i. Soit  $j$  un entier entre 1 et  $d$  tel que  $a_j \neq 0$ . Montrer que  $b_j$  est non nul.
    - ii. Montrer que  $H_u \subset H_{a_j \cdot v - b_j \cdot u}$ .
    - iii. En déduire que les vecteurs  $u$  et  $v$  sont colinéaires.
2. Soit  $\varphi : E \rightarrow K$  un morphisme non nul.
    - (a) Montrer que :  $\text{ker}(\varphi)$  est un hyperplan de  $E$ .
    - (b) Montrer qu'il existe  $u = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$  tel que

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \varphi(x) = \sum_{i=1}^d a_i \cdot x_i = 0 \text{ et } \text{ker}(\varphi) = H_u$$